扩频通信领域一种新的偶周期四元序列偶的构造研究

石 妍[1] 崔 云[1] 李 晶[1] 刘海妹[1]
SHI Yan CUI Yun LI Jing LIU Haimei

摘 要 提出了一种新的利用四阶分圆类构造新的四元序列偶的方法。假设 N 是一个奇素数，满足 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f、x 和 y 均是整数且 f 为奇数。首先，选择 4 个周期为 N 的四阶分圆序列 s_a、s_b、s_c、s_d，其中 $a,b,c,d\in\{1,2,3,4,5,6\}$；然后，对以上 4 个序列运用逆 Gray 映射得到周期为 N 的 4 个四元序列 u、v、p、q；最后，对构造得到的 4 个四元序列分组采用交织运算，得到两个周期为 $2N$ 的四元序列偶。当 x 和 y，以及 a、b、c、d 的取值不同时，构造得到的四元序列偶的自相关特性也各不相同。

关键词 四元序列偶；四阶分圆类；逆 Gray 映射；自相关特性；交织法

doi：10.3969/j.issn.1672-9528.2024.08.035

0 引言

四元序列作为一种具有良好自相关性的序列，在通信领域（如空间遥测、导航、雷达等）得到了广泛应用。但是随着学者们的研究逐渐深入，发现性能良好的四元序列存在空间受到限制，其存在的并且可用的数量也较少，目前存在的最佳四元序列的长度为 2、4、8、16，并且不存在平衡的最佳四元序列。为了满足工程中实际应用的数量需求，学者们提出了“偶”的概念 [1]，相继构造出一系列性能较好的四元序列偶 [2]，如三值四元序列偶 [3]、最佳四元序列偶 [4]、多值四序列偶 [5] 等。

目前，经过学者们研究可知，能够构造出并且可用于工程中的最佳四进序列偶普遍存在以下几个缺点：存在空间范围有限、自相关函数的峰值小、平衡性差等。为了进一步扩大四元序列偶的存在空间，满足工程应用需求，学者们又相继构造出一系列多值四元序列偶，并具有良好的自相关特性。文献 [3,5-6] 中均给出了偶周期三值四元序列偶的构造方法，文献 [7-10] 中给出了其他偶周期多值低自相关四元序列偶的构造方法。

本文在以上文献研究的基础上，提出了一种基于四阶分圆类、交织运算和逆 Gray 映射构造偶周期多值自相关四元序列偶的新方法。令 $N=4f+1=x^2+4y^2$ 是一个奇素数，x、y、f 均为整数，当四阶分圆类中 f 取奇数、x 或者 y 取不同值时，所得到的四元序列偶的自相关函数值的分布也会不同。通过本文研究，将进一步扩大四元序列偶的空间范围，满足工程应用中对具有良好自相关特性离散信号的需求。

1 相关概念及引理

引理 1[11] $N=4f+1=x^2+4y^2$ 是一个奇素数，x、y、f 均为整数。Z_N 为 N 阶有限域，$Z^*_N=Z_N\backslash\{0\}$，设 α 为有限域 Z_N 的本原元，$\varepsilon=\alpha^2$，在式中令 $\boldsymbol{D}_i=\{\alpha^i, \alpha^i\varepsilon, \alpha^i\varepsilon^2,\cdots,\alpha^i\varepsilon^{f-1}\}$，$0\le i\le 1$，那么称 $\boldsymbol{D}_0,\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\boldsymbol{D}_3$ 是有限域 Z_N 上的四阶分圆类。设 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_6$ 是六个长度为 N 的二元序列，分别等于 $\boldsymbol{D}_0\cup\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_0\cup\boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{D}_0\cup\boldsymbol{D}_3$，$\boldsymbol{D}_1\cup\boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{D}_1\cup\boldsymbol{D}_3$，$\boldsymbol{D}_2\cup\boldsymbol{D}_3$。当 f 为奇数时，这六个序列的自相关及互相关函数参考文献 [11] 附录 A 中的表 3。

引理 2 $N=4f+1=x^2+4y^2$ 是一个奇素数，对 $0\le i$，$j\le 3$，令 $(i,j)_4=\left|\{(\mathrm{x},y)\mid x\in D_i^e, y\in D_j^e, x+1=y\}\right|$

或等价于式：$(i,j)_4=\left|(D_i^4+1)\cap D_j^4\right|$，则称 $(i,j)_4$ 为 4 阶分圆数。4 阶分圆数有如下性质。

（1）$(i',j')_4=(i,j)_4$，其中 $i'\equiv i(\bmod 4)$，$j'\equiv j(\bmod 4)$。

（2）$(i,j)_4=(4-i,j-i)_4$。

（3）$(i,j)_4=\begin{cases}(j,i)_4, & \text{当 } f \text{ 为偶数}\\ (j+2,i+2)_4, & \text{当 } f \text{ 为奇数}\end{cases}$。

（4）$\sum_{j=0}^{3}(i,j)_4=\begin{cases}f-1, & \text{当} -1\in H_i^4\\ f, & \text{其他}\end{cases}$。

（5）$\sum_{i=0}^{3}(i,j)_4=\begin{cases}f-1, & \text{当 } j=0\\ f, & \text{当 } j\ne 0\end{cases}$。

定义 1[12] 令 $x=(x_0, x_1, \cdots, x_{N-1})$ 和 $y=(y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})$ 均是周期为 N 的序列，由序列 x 和 y 组成序列偶记为 (x, y)，则序列 x 与 y 的互相关函数为：

1. 河北化工医药职业技术学院 河北石家庄 050026
[基金项目] 河北省教育厅科学研究项目资助（项目立项编号：ZC2022024）

$$R_{xy}(\tau)=\sum_{j=0}^{N-1}\omega_n^{x(j)-y(j-\tau)},0\le\tau\le N-1 \tag{1}$$

被定义为序列偶 (x, y) 的自相关函数。其中，$\omega_n=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 是单位元的第 n 次复根，$j+\tau=(j+\tau)\bmod N$。当 $n=2$ 时为二元序列偶，其元素为 -1，+1，分别用 0 和 1 来表示；当 $n=4$ 时为四元序列偶，其元素为 +1，$+j$，-1，$-j$，分别用 0、1、2、3 来表示。

注意：当两个序列相等时，即 $x=y$ 时 $R_x(\tau)$ 为 x 序列的循环自相关函数被记作：

$$R_x(\tau)=\sum_{j=0}^{N-1}\omega_n^{x(j)-x(j-\tau)},0\le\tau\le N-1 \tag{2}$$

当 $n=2$ 时为二元序列，当 $n=4$ 时为四元序列。

定义 2[13] N 是一个奇素数，假设 $\boldsymbol{a}_i=(a_i(0), a_i(1), \cdots, a_i(N-1))$ 是一个周期为 N 的序列，其中 $i=0, 1$，定义矩阵 $(\boldsymbol{u}_{i,j})_{N\times 2}$：

$$(\boldsymbol{u}_{i,j})_{N\times 2}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_0(0) & \boldsymbol{a}_1(0)\\ \boldsymbol{a}_0(1) & \boldsymbol{a}_1(1)\\ \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{a}_0(N-1) & \boldsymbol{a}_1(N-1)\end{pmatrix} \tag{3}$$

连接上面矩阵的各行，得到一个长度为 $2N$ 的交错序列 u：$u(2i+j)=u_{i,j}$，$0\le i<N$，$0\le j\le 2$。

在这里，u 可以表示为 $u=I(a_0,a_1)$。其中 I 是交织运算符，序列 a_0 和 a_1 被称作序列 u 的列序列。

定义 3[14] 设 $a(t)$、$b(t)$、$c(t)$、$d(t)$ 的二元序列，令 $\phi_1^{-1}[a, b]$ 和 $\phi_2^{-1}[c, d]$ 为逆 Gray 映射，定义如下：

$$\phi_1^{-1}[a,b]=\begin{cases}0,\ (a,b)=(0,0)\\1,\ (a,b)=(0,1)\\2,\ (a,b)=(1,1)\\3,\ (a,b)=(1,0)\end{cases}\quad \phi_2^{-1}[c,d]=\begin{cases}1,\ (c,d)=(0,0)\\0,\ (c,d)=(0,1)\\3,\ (c,d)=(1,1)\\2,\ (c,d)=(1,0)\end{cases} \tag{4}$$

运用逆 Gray 映射可以构造周期为 N 的四元序列 $p(t)=\phi_1^{-1}[a(t), b(t)]$、$q(t)=\phi_2^{-1}[c(t), d(t)]$，进而 $p(t)$ 和 $q(t)$ 可以表示为：

$$\omega_4^{p(t)}=\frac{1+\omega_4}{2}(-1)^{a(t)}+\frac{1-\omega_4}{2}(-1)^{b(t)},\ \omega_4^{q(t)}=\frac{1+\omega_4}{2}(-1)^{c(t)}-\frac{1-\omega_4}{2}(-1)^{d(t)} \tag{5}$$

式中：$\omega_4=\sqrt{-1}=j$。

2 构造偶周期四元序列偶

在这一部分，将选择 4 个四阶分圆序列先后使用逆 Gray 映射和交织运算来构造出不同的理想的多值四元序列偶。

构造方法：假设 N 是一个奇素数，满足 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f、x 和 y 均是整数，且 f 为奇数。该构造方法主要有三个步骤。

步骤 1：选择 4 个周期为 N 的四阶分圆序列 $\boldsymbol{s}_a$、$\boldsymbol{s}_b$、$\boldsymbol{s}_c$、$\boldsymbol{s}_d$，其中 $a,b,c,d\in\{1,2,3,4,5,6\}$。

步骤 2：运用逆 Gray 映射得到周期为 N 的 4 个四元序列 u、v、p、q。

$$u(t)=\phi_1^{-1}[L^{m_1}(s_a),L^{m_2}(s_b)],\ v(t)=\phi_2^{-1}[L^{m_3}(s_a),L^{m_4}(s_b)]$$
$$p(t)=\phi_1^{-1}[L^{m_1}(s_c),L^{m_2}(s_d)],\ q(t)=\phi_2^{-1}[L^{m_3}(s_c),L^{m_4}(s_d)] \tag{6}$$

步骤 3：对 4 个四元序列分组采用交织运算，得到周期为 $2N$ 的四元序列偶 (E, F)。

$$E(t)=I(u,v),\ F(t)=I(p,q) \tag{7}$$

根据以上构造，若 m_1, m_2, m_3, m_4 满足以下条件：

$$\begin{cases}m_3-m_2\equiv m_1-m_4+1(\bmod N)\\ m_3-m_1\equiv m_4-m_2(\bmod N)\end{cases} \tag{8}$$

由定义 1 和定义 4 可以计算得到序列偶自相关函数，其表示为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}R_{s_a,s_c}(\tau_1)+R_{s_b,s_d}(\tau_1), & \tau=2\tau_1\\ R_{s_a,s_c}(\lambda+\tau_1)-R_{s_b,s_d}(\lambda+\tau_1), & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{9}$$

式中：$\lambda=m_3-m_1$，$\tau=2\tau_1+\tau_2$（$0\le\tau_1<N$，$0\le\tau_2<2$）。

定理 1：令 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f 为奇数，x 为非零整数，$y=1$。当 a,b,c,d 满足 $a=c$ 且 $b=d$ 条件时，取 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b)\in\{(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_3),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_1),(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_4),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_1),(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_1),(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_4),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_6),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_3),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_6),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_4),(\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_6),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5)\}$。根据以上构造方法得到的周期为 $2N$ 的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数分布为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}2N & \tau=0\\ -2 & \tau=2\tau_1\quad \tau_1\ne 0\\ \pm 4 & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{10}$$

则 (E,F) 为周期是 $2N$ 的四值四元序列偶。

证明：在这里，以 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b)$ 取 $(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_3)$ 为例，将其代入式（10）得到以下结果：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}R_{s_1}(\tau_1)+R_{s_3}(\tau_1), & \tau=2\tau_1\\ R_{s_1}(\lambda+\tau_1)-R_{s_3}(\lambda+\tau_1), & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{11}$$

根据文献 [11] 附录 A 中的表 3 数据，可得到证明结果。

定理 2：令 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f 为奇数，x 为非零整数，$y=-1$。当 a,b,c,d 满足 $a=c$ 且 $b=d$ 条件时，取 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b)\in\{(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1),(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_3),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_1),(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_4),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_1),(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_6),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_3),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_6),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_3),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_4),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_6),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_4)\}$。这时得到的周期为 $2N$ 的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}2N & \tau=0\\ -2 & \tau=2\tau_1\quad \tau_1\ne 0\\ \pm 4 & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{12}$$

则 (E,F) 为周期是 $2N$ 的四值四元序列偶。

证明：在这里，以 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b)$ 取 $(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)$ 为例，将其代入式（10）得到以下结果：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}R_{s_1}(\tau_1)+R_{s_2}(\tau_1), & \tau=2\tau_1\\ R_{s_1}(\lambda+\tau_1)-R_{s_2}(\lambda+\tau_1), & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{13}$$

根据文献 [11] 附录 A 中的表 3 数据，可得到证明结果。

定理3：令 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f 为奇数，x 和 y 均为非零整数，当 a,b,c,d 满足 $a=c$ 且 $b=d$ 条件时，取 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_c)\in\{(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_2)\}$。这时得到的周期为 $2N$ 的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}-2N-2 & \tau=0\\ 2 & \tau=2\tau_1 \quad \tau_1\neq 0\\ 0 & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{14}$$

则 (E,F) 为周期是 $2N$ 的三值四元序列偶。

证明：在这里，以 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_c)$ 取 $(\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_5)$ 为例，将其代入式（10）得到以下结果：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}R_{s_2,s_5}(\tau_1)+R_{s_2,s_5}(\tau_1), & \tau=2\tau_1\\ R_{s_2,s_5}(\lambda+\tau_1)-R_{s_2,s_5}(\lambda+\tau_1), & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{15}$$

根据文献 [11] 附录 A 中的表 3 数据，可得到证明结果。

定理4：令 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f 为奇数，x 为非零整数，y=-1 或 1，当 a, b, c, d 满足 $a\neq c\neq b\neq d$ 时，取 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b,\boldsymbol{s}_c,\boldsymbol{s}_d)\in\{(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_4),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_3)\}$。这时得到的周期为 $2N$ 的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}4-2N & \tau=0\\ 2 & \tau=2\tau_1 \quad \tau_1\neq 0\\ \pm 4 & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{16}$$

则 (E,F) 为周期是 $2N$ 的四值四元序列偶。

证明：在这里以 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b,\boldsymbol{s}_c,\boldsymbol{s}_d)$ 取 $(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_4)$ 为例，将其带入式（10）得到以下结果，

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}R_{s_1,s_6}(\tau_1)+R_{s_3,s_4}(\tau_1), & \tau=2\tau_1\\ R_{s_1,s_6}(\lambda+\tau_1)-R_{s_3,s_4}(\lambda+\tau_1), & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{17}$$

根据文献 [11] 附录 A 中的表 3 数据，可得到证明结果。

定理5：令 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f 为奇数，x 为非零整数，y=-1 或 1，当 a,b,c,d 满足 $a\neq c\neq b\neq$ d 时，取 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b,\boldsymbol{s}_c,\boldsymbol{s}_d)\in\{(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_2)\}$。这时得到的周期为 $2N$ 的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}4-2N & \tau=0\\ 0\text{或}4 & \tau=2\tau_1 \quad \tau_1\neq 0\\ \pm 2 & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{18}$$

则 (E,F) 为周期是 $2N$ 的多值四元序列偶。

证明：在这里，以 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b,\boldsymbol{s}_c,\boldsymbol{s}_d)$ 取 $(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5)$ 为例，将其代入式（10）得到以下结果：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}R_{s_1,s_6}(\tau_1)+R_{s_2,s_5}(\tau_1), & \tau=2\tau_1\\ R_{s_1,s_6}(\lambda+\tau_1)-R_{s_2,s_5}(\lambda+\tau_1), & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{19}$$

根据文献 [11] 附录 A 中的表 3 数据，可得到证明结果。

定理6：令 $N=4f+1=x^2+4y^2$，f 为奇数，y 为非零整数，x=-1 或 1，当 a,b,c,d 满足 $a\neq c\neq b\neq d$ 时，取 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b,\boldsymbol{s}_c,\boldsymbol{s}_d)\in\{(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_2),(\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5),(\boldsymbol{s}_6,\boldsymbol{s}_5,\boldsymbol{s}_4,\boldsymbol{s}_2)\}$。这时得到的周期为 $2N$ 的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}3-N & \tau=0\\ \pm 2 & \tau=2\tau_1 \quad \tau_1\neq 0\\ 0\text{或}-4 & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{20}$$

则 (E,F) 为周期是 $2N$ 的多值四元序列偶。

证明：在这里，以 $(\boldsymbol{s}_a,\boldsymbol{s}_b,\boldsymbol{s}_c,\boldsymbol{s}_d)$ 取 $(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{s}_5)$ 为例，将其代入式（10）得到以下结果：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}R_{s_1,s_3}(\tau_1)+R_{s_2,s_5}(\tau_1), & \tau=2\tau_1\\ R_{s_1,s_3}(\lambda+\tau_1)-R_{s_2,s_5}(\lambda+\tau_1), & \tau=2\tau_1+1\end{cases} \tag{21}$$

根据文献 [11] 附录 A 中的表 3 数据，可得到证明结果。

3 举例

在这部分，主要针对第二部分的构造定理给出以下实例加以验证。取 $N=29=4f+1=x^2+4y^2$，其本原元为 2，f=7 为奇数。$\boldsymbol{D}_0,\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\boldsymbol{D}_3$ 是有限域 Z_N 上的四阶分圆类，分别为 $\boldsymbol{D}_0$={1, 7, 16, 20, 23, 24, 25}，$\boldsymbol{D}_1$={2, 3, 11, 14, 17, 19, 21 }，$\boldsymbol{D}_2$={4, 5, 6, 9, 13, 22, 28}，$\boldsymbol{D}_3$={8, 10, 12, 15, 18, 26, 27}。由此可得：

$\boldsymbol{s}_1$ = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)，

$\boldsymbol{s}_2$ = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)，

$\boldsymbol{s}_3$ = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)，

$\boldsymbol{s}_4$ = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)，

$\boldsymbol{s}_5$ = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)，

$\boldsymbol{s}_6$ = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)，

例 1：分别取 $\boldsymbol{s}_a=\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_b=\boldsymbol{s}_3$，$\boldsymbol{s}_c=\boldsymbol{s}_6$，$\boldsymbol{s}_d=\boldsymbol{s}_4$，此外取 y=1，$m_1=m_2=0$，$m_3=m_4=9$，根据本文构造方法可得：

$\boldsymbol{u}(t)$ = (02330002101310312313231222110)

$\boldsymbol{v}(t)$ = (10201203202321333001132211130)

$\boldsymbol{p}(t)$ = (00112220323132130131012000332)

$\boldsymbol{q}(t)$ = (32023021020103111223110033312)

再使用逆 Gray 映射和交织运算得到周期为 $2N$ 的四元序

列 $\boldsymbol{E}(t)$ 和 $\boldsymbol{F}(t)$：

$\boldsymbol{E}(t)$ = (023300021013103123132312221110, 102012032023213330011322111130)

$\boldsymbol{F}(t)$ = (001122203231321301310120003 32, 320230210201031112231100333 12)

通过计算可得由序列 E 和 F 组成的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}-54 & \tau=0\\ 2 & \tau=0(\bmod 2),\tau\neq 0\\ \pm 4 & \tau=1(\bmod 2)\end{cases} \quad (22)$$

例 2：分别取 $\boldsymbol{s}_a=\boldsymbol{s}_b=\boldsymbol{s}_2$，$\boldsymbol{s}_c=\boldsymbol{s}_d=\boldsymbol{s}_5$，此外取 $m_1=m_2=0$，$m_3=m_4=9$，根据本文构造方法可得：

$\boldsymbol{u}(t)$ = (020022220200020020002022220 02)

$\boldsymbol{v}(t)$ = (311131131111313333111313113 3331)

$\boldsymbol{p}(t)$ = (002200002022220220222020000222)，

$\boldsymbol{q}(t)$ = (133313313333131111333113311113)

再使用逆 Gray 映射和交织运算得到周期为 $2N$ 的四元序列 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$：

$\boldsymbol{E}(t)$ = (020022220200020020002022220 02, 311131131111313333111313113 3331)

$\boldsymbol{F}(t)$ = (002200002022220220222020000222, 133313313333131111333113311113)

通过计算可得由序列 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 组成的四元序列偶 (E,F) 的自相关函数为：

$$R_{E,F}(\tau)=\begin{cases}-61 & \tau=0\\ 2 & \tau=0(\bmod 2),\quad \tau\neq 0\\ 0 & \tau=1(\bmod 2)\end{cases} \quad (23)$$

4 结论

本文研究了偶周期四元序列偶的构造方法。令 $N=4f+1=x^2+4y^2$ 是奇素数，f 为奇数，利用其在有限域 Z_N 上的 4 个四阶分圆类序列，经过使用逆 Gray 映射和交织运算，构造了一类新的偶周期四元序列偶。结果表明，这些四元序列偶具有良好的自相关性，可以进一步拓宽工程应用的范围。

参考文献：

[1] 赵晓群 , 何文才 , 王仲文 , 等 . 最佳二进阵列偶理论研究 [J]. 电子学报 ,1999(1):35-38.

[2]JIA Y, DUAN X, SHI Y, et al.The constructions of ternary sequence pairs with two-level autocorrelation[J].Journal of information & computational science,2014,11(13):4605-4612.

[3] 彭秀平 , 许成谦 , 李刚 . 周期为偶数的三值自相关四进序列偶 [J]. 系统工程与电子技术 ,2012,34(10):1999-2004.

[4] 许成谦 , 彭秀平 . 最佳四进阵列偶构造方法研究 [J]. 电子学报 , 2010,38(1):6-12.

[5]SHEN X, JIA Y, SONG X.Constructions of binary sequence pairs of period 3p with optimal three-level correlation[J]. IEEE communication letters,2017,21(10):2150-2153.

[6]PENG X, LIN H, REN J, et al.Constructions for almost perfect binary sequence pairs with even length[J].Journal of systems engineering and electronics,2018,29(2):256-261.

[7]JIA Y, SHI Y, DUAN X, et al.New construction of quaternary sequence pairs with even period[J].Journal of information and computational science,2014,11(13):4613-4621.

[8]MU Y, WANG J, JIA Y, et al.Some new constructions of the almost difference set pairs based on whiteman generalized cyclotomic[J].ICIC express letters, 2017,11(7):1245-1251.

[9] 石妍 . 差集偶和四元序列偶的新构造方法研究 [D]. 秦皇岛 : 燕山大学 , 2015.

[10] 罗炼飞 . 低相关二元序列集与三值相关序列偶的构造研究 [D]. 西安 : 西安电子科技大学 ,2020.

[11]SU W, YANG Y.New quaternary sequences of even length with optimal auto-correlation[J].Science China-information sciences, 2018,61(2):022308:1-022308:13.

[12]TANG X, DING C.New classes of balanced quaternary and almost balanced binary sequences with optimal autocorrelation value[J].IEEE transactions on information theory, 2010,56(12):6398-6405.

[13] 沈灏 . 组合设计理论 [M]. 上海 : 上海交通大学出版社 , 1996.

[14] 彭秀平 , 郑德亮 , 冀惠璞 , 等 . 周期为合数长屏蔽二元互补序列偶构造方法研究 [J]. 电子学报 ,2021,49(8):1499-1473.

【作者简介】

石妍（1989—），女，河北石家庄人，硕士，讲师，研究方向：扩频通信。

（收稿日期：2024-05-27）