

高阶严格反馈系统的预定义时间动态面控制

赵尔全¹ 靳晓荣¹ 陶 焯¹ 魏 博¹ 董晶宏²

ZHAO Erquan JIN Xiaorong TAO Ye WEI Bo DONG Jinghong

摘要

研究了高阶严格反馈系统的预定义时间跟踪问题。预定义时间一阶滤波器缓解了传统反步法中固有的计算复杂性爆炸问题，简化了控制器设计过程。为避免因滤波误差导致的控制精度下降，设计了新的预定义时间动态补偿系统。通过结合反步法控制与预定义时间稳定理论，提出预定义动态面控制器，确保受控系统在用户设定的时间内达到收敛。最后，数学仿真验证了所提控制方案的合理性和有效性。

关键词

预定义时间稳定；动态面控制；反步法控制；误差补偿机制

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2024.09.028

0 引言

高阶严格反馈系统的跟踪控制方案一直是研究热点，其中反步法是适用于此类系统的重要技术手段。Liu 等人^[1]在反步控制框架下构建了自适应量化控制策略。对于输出约束时变的跟踪问题，文献[2]运用反步技术设计了一种递归式控制算法。另外，针对受到外部干扰的严格反馈系统，Lu 等人^[3]引入以神经网络为基础的非保守性反步控制技术。

然而，传统反步法中存在着固有的计算复杂度爆炸问题，这是由虚拟控制信号的反复微分所导致的。在控制器设计过程中引入一阶滤波器，有效地规避了这一问题。文献[4]设计了带饱和和处理模块的滑模动态面控制器来处理动力定位船舶的推进器饱和问题。文献[5]基于动态面控制技术针对状态约束和输入量化系统，设计了有限时间跟踪控制器。

被控系统的收敛时间是衡量系统控制性能的重要指标之一。从该角度出发，可细为渐近收敛^[6]、有限时间收敛^[7]、固定时间收敛^[8]、预定义时间收敛^[9]等。具体而言，对于存在动力学和运动学不确定性的机器人操作器，文献[6]构建了一种自适应模糊全局快速终端控制器，确保闭环控制系统获得全局渐近稳定性。文献[7]为具有输入量化和输出约束的切换系统设计了一种有限时间命令滤波控制器。在命令滤波反步法和实用固定时间稳定理论指导下，文献[8]为水轮机调节系统设计了一种新型实用固定时间命令滤波反步策略。进一步地，借助预定义时间稳定理论，文献[9]引入基于神经网络的自适应跟踪控制器。然而，渐近收敛的稳态时间取决于系统控制参数，需要复杂的参数调整规则。有限收

敛时间严重依赖于系统初始值的选择，甚至需要额外的参数初始化技术来确保整个闭环系统的稳定性。虽然在固定时间框架下的稳定时间不受初始值选择的影响，但往往需要调整三个或更多参数来确定。预定义时间控制器通常只需调整一个或两个参数即可实现，具有更广泛的应用范围和更好的控制性能。

以上讨论启发，本工作研究了针对高阶严格反馈系统的预定义时间动态面控制器。主要工作概括如下：通过应用预定义时间一阶滤波器，不仅可以对参考信号预处理，还可以避免对虚拟控制信号重复微分；设计了一种新颖的预定义时间误差补偿机制，既减少了滤波误差对控制性能的影响，又确保了受控系统实现预定义时间收敛。

本文结构安排如下：第一部分阐述问题描述与预备知识；第二部分给出预定义时间动态面控制器设计及稳定性分析；第三部分展示仿真验证实例；第四部分总结全文结论。

1 问题描述与预备知识

1.1 问题描述

考虑下列高阶严格反馈非线性系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

式中： $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]$ ， $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是系统状态变量，已知函数 $g_i(\bar{x}_i)$ 表示系统增益， $f_i(\bar{x}_i)$ 是系统非线性函数， u 和 y 分别表示控制信号和系统输出。

本文的控制目标是为严格反馈系统构建一个预定义时间动态面控制器，以确保跟踪误差在用户设定的时间内收敛。

为了便于预定义时间动态面控制器设计，给出下列若干假设与引理。

假设 1：参考信号 x_d 是连续且有界的。

1. 中国兵器工业集团甘肃银光化学工业集团有限公司
甘肃白银 730900
2. 白银有色集团股份有限公司 甘肃白银 730900

1.2 预备知识

引理 1^[10]: 对于非线性系统:

$$x = h(x, \rho) \quad (2)$$

式中: $x \in \mathbf{R}^n$ 表示系统状态, ρ 是系统参数, $h(x, \rho)$ 是非线性函数, 系统 (2) 的平衡点为 $x = 0$ 。

对于系统 (2), 如果存在一个李雅普诺夫函数满足: 当且仅当时, $x = 0, V(x) = 0$; 对于任意 x 都有 $V(x) \geq 0$, 总能得到:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\gamma_p \kappa_p T_p} \exp(\gamma_p V^{\kappa_p}) V^{1-\kappa_p} \quad (3)$$

式中: $0 < \kappa_p \leq 1$, 常数 $\gamma_p, T_p > 0$ 。则系统 (2) 是预定义时间稳定, 且收敛时间满足 $t \leq T_p$ 。

引理 2^[11]: 对于两个相似的递增或递减数列 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \dots, y_n)$, 可得:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \quad (4)$$

引理 3: 对于正实数列 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 下列不等式成立:

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

引理 4: 对于自然数 x_i , 可知:

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^c \geq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^c \quad (6)$$

2 问题描述与预备知识

2.1 预定义时间一阶滤波器

在本小节, 为了对参考信号预处理以及克服反步法控制中的计算复杂性爆炸难题, 设计了下列预定义时间滤波器:

$$\tau \dot{g}_i = -z_i - \frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2} z_i^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} z_i^2\right)^{-\kappa} z_i \quad (7)$$

式中: g_i 为输出变量, $z_i = g_i - \bar{\alpha}_i$ 是滤波误差, $\bar{\alpha}_i$ 是输入变量, $T > 0, 0 < \kappa < 1, l$ 是设计参数。使 $\bar{\alpha}_i$ 通过滤波器在时间常数 τ 内得到 g_i 。

为了消除滤波误差对控制精度的负面影响, 构建了新型预定义时间滤波误差补偿机制 ($i = 2, \dots, n$):

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = a\phi_2 - b|z_{1,1}| \text{sign}(z_{1,1}) - \frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2} \phi_1^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} \phi_1^2\right)^{-\kappa} \phi_1 \\ \dot{\phi}_2 = a\phi_3 - a\phi_1 - b|z_{1,1}| \text{sign}(z_{1,1}) \\ - \frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2} \phi_2^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} \phi_2^2\right)^{-\kappa} \phi_2 \\ \dot{\phi}_{n+1} = -a\phi_n - \frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2} \phi_{n+1}^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} \phi_{n+1}^2\right)^{-\kappa} \phi_{n+1} \end{cases} \quad (8)$$

式中: a 和 b 为设计参数。分别选取常数 T_c 为 1、2、3, 预定义时间误差补偿信号的收敛效果如图 1 所示。

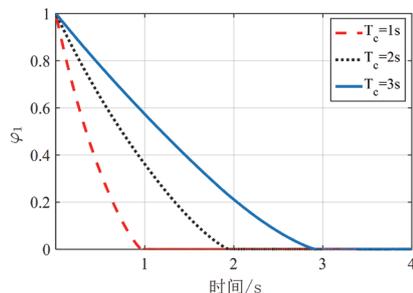


图 1 补偿信号收敛结果

此外, 关于误差补偿系统 (8) 有下列结论。

定理 1: 根据动态系统 (8) 以及引理 1, 可知误差补偿系统满足预定义时间稳定。

证明 1: 选择李亚普诺夫函数为 $V_c = \sum_{i=1}^n \phi_i^2 / 2$, 其时间域导数满足:

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= -b \sum_{i=1}^n \phi_i |z_{i,1}| \text{sign}(z_{i,1}) - \frac{l}{2\kappa T} \\ &\quad \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\exp\left(\frac{1}{2} \phi_i^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} \phi_i^2\right)^{-\kappa} \phi_i \right) \end{aligned} \quad (9)$$

根据杨氏不等式, 可得:

$$\phi_i |z_{i,1}| \text{sign}(z_{i,1}) \leq \frac{\phi_i^2}{2} + \frac{|z_{i,1}|^2}{2} \quad (10)$$

则, 公式 (9) 被重写为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\phi_i^2}{2} + \frac{|z_{i,1}|^2}{2} \right) - \frac{l}{\kappa T} \\ &\quad \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \phi_i^2\right)^{\kappa} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \phi_i^2\right)^{1-\kappa} \\ &\leq -\frac{l}{\kappa T} \exp(V_c)^{\kappa} V_c^{1-\kappa} \end{aligned} \quad (11)$$

计算可知预定义收敛时间 $t_c \leq T/l$ 。

证毕。

2.2 预定义时间控制器

在本小节, 为了对参考信号预处理以及克服反步法控制中的计算复杂性爆炸难题, 设计了下列预定义时间滤波器:

$$o_i = x_i - g_{i,1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

式中: x_i 是被控系统 (1) 的输出状态, x_i 是系统状态, $g_{i,1}$ 是预定义时间一阶滤波器输出。

注 1: 此处 $i = 1$ 时, 让参考信号 x_d 经过滤波器 (7), 对参考信号预处理并得到其导数信号; 当 $i = 2, \dots, n$ 时, 使虚拟控制信号经过滤波器。

考虑误差补偿系统 (9), 定义补偿误差为 $e_i = o_i - \phi_i$, 虚拟控制信号和实际控制信号设计为:

$$\begin{cases} \alpha_1 = g_1^{-1}(x_1) \left(\frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2} e_1^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} e_1^2\right)^{-\kappa} e_1 \right) \\ \alpha_i = g_i^{-1}(\bar{x}_i) \left(\frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2} e_i^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} e_i^2\right)^{-\kappa} e_i \right) \\ u = g_n^{-1}(\bar{x}_n) \left(\frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2} e_n^2\right)^{\kappa} \left(\frac{1}{2} e_n^2\right)^{-\kappa} e_n \right) \end{cases} \quad (13)$$

式中: $0 < \kappa < 1$, $0 < l < 1$, $i = 1, \dots, n$ 是正常数, T 代表预定义的稳定时间, $f_i(\bar{x}_i)$ 是被控系统 (1) 中的已知函数, $\vartheta_{i,1}$ 是一阶滤波器的输出, φ_i 是误差补偿信号。

Step i : $i = 1, \dots, n-1$: 构造李亚普诺夫函数 $V_i = e_i^2/2$, 其导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= e_i \dot{e}_i, \\ &= e_i \begin{pmatrix} f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} \\ -\dot{\vartheta}_{i-1} - \dot{\varphi}_{i-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

将虚拟控制信号代入公式 (14) 中得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= e_i \begin{pmatrix} -h_i e_i - \frac{l}{2\kappa T} \\ \exp\left(\frac{1}{2}e_i^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}e_i^2\right)^{-\kappa} e_i \end{pmatrix} \\ &= -h_i e_i^2 - \frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2}e_i^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}e_i^2\right)^{1-\kappa} \\ &\leq -\frac{l}{2\kappa T} \exp(V_i)^\kappa V_i^{1-\kappa} \end{aligned} \quad (15)$$

Step n : 选择李亚普诺夫函数为 $V_n = e_n^2/2 + V_i$, 其导数满足:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_i + e_n \dot{e}_n, \\ &= \dot{V}_i + e_n \begin{pmatrix} f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u \\ -\dot{\vartheta}_{n-1} - \dot{\varphi}_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

将最终控制信号 u 代入公式 (16) 中, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_i + e_n \begin{pmatrix} -h_n e_n - \frac{l}{2\kappa T} \\ \exp\left(\frac{1}{2}e_n^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}e_n^2\right)^{-\kappa} e_n \end{pmatrix} \\ &= \dot{V}_i - h_n e_n^2 - \frac{l}{\kappa T} \\ &\quad \exp\left(\frac{1}{2}e_n^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}e_n^2\right)^{1-\kappa} \\ &\leq \dot{V}_i - \frac{l}{\kappa T} \exp(V_n)^\kappa V_n^{1-\kappa} \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \frac{l}{\kappa T} \exp(V_i)^\kappa V_i^{1-\kappa} \end{aligned} \quad (17)$$

定理 2: 考虑满足假设 1 的被控系统 (1), 在应用预定义时间一阶滤波器 (7)、误差补偿机制 (8) 以及控制信号 (13) 的前提下, 追踪误差 e_i 在自定义的稳定时间 t_n 内收敛。

证明 2: 应用引理 2 和 3:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \exp(V_i)^\kappa V_i^{1-\kappa} \\ &\geq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \exp(V_i)^\kappa \right) \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^n V_i^{1-\kappa} \right) \\ &\geq \exp(V_i)^\kappa \prod_{i=1}^n \left(\exp(V_i)^\kappa \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \exp\left(\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (V_i)^\kappa \right)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

根据公式 (17) 和 (18) 可得:

$$\dot{V}_n \leq -\frac{l}{\kappa T} \exp\left(\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (V_i)^\kappa \right)\right) \left(\sum_{i=1}^n (V_i) \right)^{1-\kappa} \quad (19)$$

根据引理 4 可得:

$$\sum_{i=1}^n (V_i)^{1-\kappa} \geq \left(\sum_{i=1}^n (V_i) \right)^{1-\kappa} \quad (20)$$

因此, 不等式 (19) 被重写为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\frac{l}{\kappa T} \exp\left(\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (V_i)^\kappa \right)\right) \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^n (V_i) \right)^{1-\kappa}, \\ &\leq -\frac{l}{\kappa T} \exp\left(\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (V_i)^\kappa \right)\right) \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^n (V_i) \right)^{1-\kappa} \\ &= -\frac{l}{\kappa T} \exp\left(\frac{1}{n+1} V_n^\kappa\right) (V_n)^{1-\kappa} \end{aligned} \quad (21)$$

根据引理 1, 整个闭环系统 (1) 是预定义时间稳定的, 且收敛时间 t_n 满足 $t_n \leq (n+1)T/l$ 。

3 仿真案例

在本工作中, 下列三阶严格反馈系统用来仿真实验:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2) + g_2(\bar{x}_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(\bar{x}_3) + g_3(\bar{x}_3)u \end{cases} \quad (22)$$

式中: $f_1(x_1) = (\sin x_1)^2 \cos x_1$, $f_2(\bar{x}_2) = x_1 \sin x_2$, $f_3(\bar{x}_3) = x_1 + x_2 + x_3^2$, $g_1(x_1) = 2 + 0.1 \sin(x_1)$, $g_2(x_1, x_2) = -3 + 0.1 \cos(x_1 x_2)$, $g_3(x_1, x_2, x_3) = -3 + 0.1 x_3 \cos(x_1 x_2)$ 。

预定义时间一阶滤波器设计为 ($i = 1, 2, 3$):

$$\tau \dot{\vartheta}_i = -z_i - \frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2}z_i^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}z_i^2\right)^{-\kappa} z_i \quad (23)$$

然后误差补偿机制设计为:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = a\varphi_{i+1} - a\varphi_{i-1} - b|z_{i,1}| \text{sign}(z_{i,1}) \\ \quad - \frac{l}{2\kappa T} \exp\left(\frac{1}{2}\varphi_i^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}\varphi_i^2\right)^{-\kappa} \varphi_i \\ \dot{\varphi}_4 = -a\varphi_3 - \frac{l}{2\kappa T} \\ \quad \exp\left(\frac{1}{2}\varphi_4^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}\varphi_4^2\right)^{-\kappa} \varphi_4 \end{cases} \quad (24)$$

将预定义时间控制器设计为:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -f_1(x_1) + \dot{x}_d - h_1 e_1 - \frac{l}{2\kappa T} \\ \quad \exp\left(\left(\frac{1}{2}e_1^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}e_1^2\right)^{-\kappa}\right) e_1 \\ \alpha_2 = -f_2(\bar{x}_2) + \dot{\vartheta}_{2,1} + \dot{\varphi}_1 - h_2 e_2 - \frac{l}{2\kappa T} \\ \quad \exp\left(\left(\frac{1}{2}e_2^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}e_2^2\right)^{-\kappa}\right) e_2 \\ u = -f_3(\bar{x}_3) + \dot{\vartheta}_{3,1} + \dot{\varphi}_2 - h_3 e_3 - \frac{l}{2\kappa T} \\ \quad \exp\left(\left(\frac{1}{2}e_3^2\right)^\kappa \left(\frac{1}{2}e_3^2\right)^{-\kappa}\right) e_3 \end{cases} \quad (25)$$

在本仿真实验中, 一阶滤波器参数选择为 $\tau = 0.01$; 误差补偿系统的参数选择为 $a = 0.2$, $T = 2$, $\kappa = 0.4$, $b = 0.65$, $l = 0.55$; 控制参数选择为 $h_1 = h_2 = h_3 = 0.1$ 。系统输出 x_i 的初始状态为 0.5, 其余变量的初值为 0。参考信号为 $x_d = \sin t + \cos t$, 仿真结果为图 2~图 4。图 2 为期望轨迹 x_d , 系统输出 x_1 以及追踪误差 e_1 , 显然, 被控系统在 2 s 内收敛。图 3 给出了虚拟控制信号 α_i 和实际控制信号 u , 其中通过调节滤波器参数实现了预定义时间滤波器对虚拟控制信号的精确跟踪。图 4 给出了系统状态 x_2 和 x_3 。

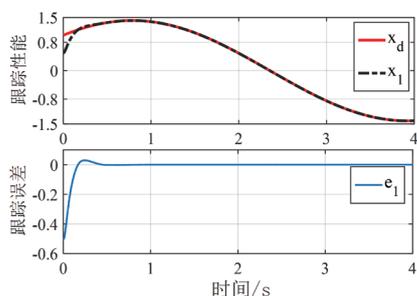


图2 系统追踪性能

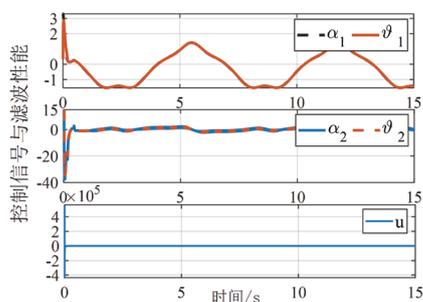


图3 控制信号

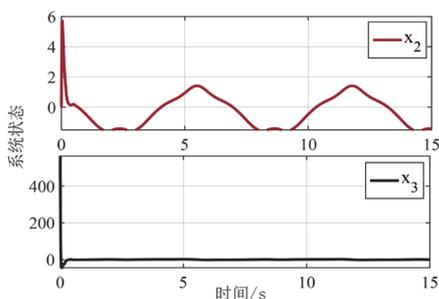


图4 系统状态

4 结论

基于反步法控制框架,设计了一种高阶严格反馈系统的预定义时间动态面控制器。所提出的预定义时间一阶滤波器避免了虚拟控制信号的重复微分,也对参考信号进行预处理。为进一步提高控制精度,设计了预定义时间的滤波误差补偿系统。最后,通过数学仿真验证了所提控制方案的可行性。未来的工作将探索将预定义时间动态面控制扩展到具有输入端非线性的复杂非线性系统。

参考文献:

[1]LIU B, WANG W, LI Y, et al.Adaptive quantized predefined-time backstepping control for nonlinear strict-feedback systems[J].IEEE transactions on circuits and systems II: express briefs, 2022, 69(9): 3859-3863.
 [2]FU L, MA R, PANG H, et al.Predefined-time tracking of nonlinear strict-feedback systems with time-varying output constraints[J].Journal of the Franklin institute, 2022, 359(8): 3492-3516.

[3]LÜ J X, JU X Z, WANG C H.Neural network-based nonconservative predefined-time backstepping control for uncertain strict-feedback nonlinear systems[J/OL]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2023.[2024-05-12]. <https://ieeexplore.ieee.org/document/10197241>.
 [4]苏义鑫,公成龙,张丹红.考虑推进器饱和特性的动力定位船舶递归滑模动态面控制[J].振动与冲击, 2023,42(8): 206-214.
 [5]朱新峰,丁文武,张天平.具有输入量化和全状态约束的非严格反馈随机非线性系统的有限时间动态面控制[J].控制与决策, 2022, 37(10):2575-2584.
 [6]SOLTANPOUR M R, ZAARE S.Task space control of the robot manipulators with adaptive fuzzy global fast terminal sliding mode control in presence of dynamic and kinematic uncertainties[J]. International journal of adaptive control and signal processing, 2024, 38(1):121-145.
 [7]CHENG F, WANG H, ZONG G, et al.Adaptive finite-time command-filtered control for switched nonlinear systems with input quantization and output constraints[J].Circuits, systems, and signal processing, 2023,42(1):147-172.
 [8]刘凯,辛丽平,刘家硕,等.连续搅拌反应釜的固定时间命令滤波跟踪控制[J].控制与决策, 2024,39(6):1936-1942.
 [9]WANG H, TONG M, ZHAO X, et al.Predefined-time adaptive neural tracking control of switched nonlinear systems[J].IEEE transactions on cybernetics, 2023, 53(10):6538-6548.
 [10]PAN Y, JI W, LIANG H.Adaptive predefined-time control for Lü chaotic systems via backstepping approach[J].IEEE transactions on circuits and systems II: express briefs, 2022, 69(12): 5064-5068.
 [11]GONG Y, GUO Y, LI D, et al.Predefined-time tracking control for high-order nonlinear systems with control saturation[J].International journal of robust and nonlinear control, 2022, 32(11): 6218-6235.

【作者简介】

赵尔全(1994—),男,甘肃白银人,硕士,助理工程师,研究方向:机械臂控制、滑模控制。

靳晓荣(1984—),男,甘肃白银人,本科,工程师,研究方向:计算机应用。

陶焯(1998—),男,甘肃白银人,本科,助理工程师,研究方向:控制理论与应用。

魏博(1998—),男,甘肃白银人,本科,助理工程师,研究方向:计算机软件工程。

董晶宏(1993—),男,甘肃白银人,本科,助理工程师,研究方向:非线性系统控制。

(收稿日期:2024-06-08)