

复杂网络上谣言传播最优控制问题的研究

张 威¹
ZHANG Wei

摘 要

为了使谣言在传播过程中造成的总损失最低, 提出一个谣言传播模型的最优控制问题, 寻找一种动态控制策略。首先建立了一个带有控制的谣言传播模型, 提出相应的最优控制问题; 然后分析其解和最优控制的存在性, 并构建哈密尔顿函数, 得到最优控制的必要条件; 最后通过例子验证最优控制策略得到的理论结果, 表明最优控制可以在更短时间内使谣言传播的总损失降到最低。

关键词

复杂网络; 谣言传播; 最优控制

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2024.04.045

0 引言

谣言作为一种普遍的社会现象, 影响着人们的日常生活。谣言的特点可以概括为信息性、传播性和未知性。谣言的传播是经过人们解释和评论的一个过程, 也是一个信息传播的过程。随着网络的高速发展, 谣言的传播速度越来越快, 但这也给人们带来很多安全隐患, 例如信息泄露和言论的真实性等。谣言给人们带来的心理焦虑和恐惧, 以及谣言背后的社会现象, 都值得人们深思。从对谣言传播、最优控制问题和复杂网络现有的研究工作分析可知, 大多数的复杂网络上的谣言传播模型都只是分析了其影响因素, 从不同角度下考察谣言传播过程, 得出临界阈值以及最后听到谣言的人群分布^[1-4]。针对复杂网络上谣言传播模型的最优控制策略, 目前相关的研究还十分有限^[5]。为了找到一个降低传播, 使谣言传播造成的总损失最低的动态控制策略, 从数学分析的角度研究这个模型的动力学行为以及最优控制策略, 对社会的稳定、人的心理健康有着重大的意义, 从而使得复杂网络上谣言传播模型在控制理论与应用上得到进一步发展。本文主要研究内容为: (1) 研究复杂网络上谣言传播的动力学模型, 分析其影响因素, 加入导控—转化传播者的策略, 建立相应的谣言传播模型; (2) 研究复杂网络上谣言传播模型的动态最优控制策略, 使谣言传播造成的总损失最小, 定义相应的参数, 提出一个最优控制问题, 寻找一种动态控制策略, 分析其解的存在性、最优控制的存在性, 构建哈密尔顿函数, 得出最优控制的必要条件; (3) 根据前面所得出的动力学模型和提出的最优控制问题, 提供相应数值算例验证理论结果, 通过分析仿真实验谣言在复杂网络上的传播动力学行为。在仿真实验中, 定义相应的参数, 例如节点数、网络平均度等,

验证理论结果。

1 SIDRQ 谣言传播模型的建立

为了维持人们的正常生活和社会秩序, 政府部门将引导和控制谣言的传播, 遏制谣言的传播。在谣言模型中, 将一个均匀混合的人群分为五类: I—未知者 (Ignorants), 指从未听说过谣言的人; S—传播者 (Spreaders), 即知道谣言的人, 并积极传播谣言的人; D—怀疑者 (Doubters or Skeptics), 表示听过谣言, 但对谣言持怀疑态度的人并停止传播谣言; R—免疫者 (Removed or Stilfers), 指听到谣言但不散布谣言的人; Q—导控者 (Quarantine or Control), 指因政府采取措施而无法传播谣言的人。根据 Maki 等人^[6]的研究, 在这个模型中, 假设谣言传播者只将谣言传播给他们自己的邻居节点。此外, 假设当传播者与传播者接触时, 只有最初的传播者获得免疫。考虑传播者、未知者、怀疑者、免疫者和导控者的 SIDRQ (spreaders doubters ignorants removed quarantine) 谣言传播过程示意图如图 1 所示, 其传播规则如下。

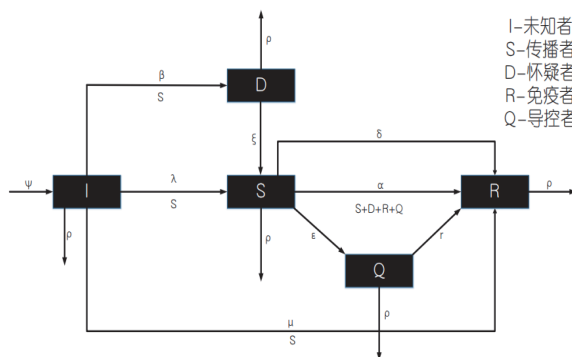


图 1 SIDRQ 模型的传播过程示意图

(1) 当一个未知者和一个传播者接触时, 该未知者转

化为传播者的概率为 λ , 成为免疫者的概率为 μ , 以 β 的概率转化为怀疑者, 即 λ 是传播率, μ 是拒绝率, β 是怀疑率。

(2) 当一个传播者和一个传播者, 或者一个怀疑者, 或者一个免疫者接触时, 初始传播者转化为免疫者的概率为 α , 称 α 为免疫率。

(3) 当政府部门采取引导和控制措施, 比如封号、禁言或教育时, 传播者以 ε 的概率转化为导控者, 导控者以概率为 γ 自发成为免疫者, 将 ε 称为导控率, γ 称为转化率。

(4) 传播者因为忘记谣言而自发免疫的概率为 δ , 怀疑者自发成为谣言传播者的概率为 ξ , 称 δ 为遗忘率。

由于在线社交网络(open systems network support, OSNs)的开放性和动态性, 本文考虑了系统的可变人口规模, 假设谣言在系统中传播, 并且人口迁入率不变。所有新用户以常数(即迁入率)进入未知类。现有人全部以控制变量 $\rho(t)$ (即迁出率)从五个类别中退出。

为了将谣言传播带来的影响降到最低, 不仅要让谣言导致的直接损失降到最低, 而且保证在 OSNs 中的迁出率低, 使得该网络的节点数减少量小, 建立一个带有控制的谣言传播模型, 结合 SIDRQ 谣言的传播规律, SIDRQ 谣言在均匀网络上的传播动力学用平均场方程可以描述为:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \lambda \bar{k} I(t) S(t) - \alpha \bar{k} S(t) (S(t) + D(t) + R(t) + Q(t)) + \xi D(t) - (\delta + \varepsilon) S(t) - \rho(t) S(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} = \beta \bar{k} I(t) S(t) - \xi D(t) - \rho(t) D(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \psi - (\lambda + \beta + \mu) \bar{k} I(t) S(t) - \rho(t) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \mu \bar{k} I(t) S(t) + \alpha \bar{k} S(t) (S(t) + D(t) + R(t) + Q(t)) + \delta S(t) + \gamma D(t) - \rho(t) R(t), \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \varepsilon S(t) - \gamma Q(t) - \rho(t) Q(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $S(t)$ 、 $D(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 、 $Q(t)$ 是动力学模型中的状态变量, $\rho(t)$ 是动力学模型中的控制变量, 令 $u = \rho$, 定义在动力学模型的一个容许控制集。假设控制变量是在给定时间区间 $[0, T]$ 上的 Lebesgue 可测函数。其中 $\bar{\rho}$, $\underline{\rho}$ 是正的常数, 满足:

$$U = \{u = \rho(t) | \underline{\rho} \leq \rho(t) \leq \bar{\rho}, t \in [0, T]\}. \quad (2)$$

2 最优控制策略

2.1 最优控制问题的提出

提出一个最优控制问题, 旨在寻找一种动态控制策略, 目标是使谣言传播造成的总损失, 即谣言导致的直接损失及各类迁出成本最小。状态方程为式 (1) [7]。

考虑目标泛函为:

$$J(u) = \int_0^T [aS(t) + \frac{1}{2}b\rho^2(t)] \quad (3)$$

式中: $a, b > 0$, 是加权参数。目标是在 U 上找到使目标泛函取得极小值的最优控制 u^* 。

因此, 提出最优控制问题如下:

$$\begin{cases} \min_{u \in U} J(u) = J^*(u^*), \\ s.t. (1), (S(0), D(0), I(0), R(0), Q(0)) \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

式中: Ω 是系统 (1) 的正向不变集。

2.2 主要结论和证明

定理 1 系统 (1) 存在一个非负解。

证明 令:

$$x(t) = (S(t), D(t), I(t), R(t), Q(t))^T,$$

则系统 (1) 可以改写为如下形式:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(x(t)). \quad (5)$$

式中:

$$A(t) = \begin{pmatrix} A & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho(t) & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \rho(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$F(x(t)) = \begin{pmatrix} \lambda \bar{k} I(t) S(t) - \alpha \bar{k} S(t) (S(t) + D(t) + R(t) + Q(t)) + \xi D(t), \\ \beta \bar{k} I(t) S(t), \\ -(\lambda + \beta + \mu) \bar{k} I(t) S(t), \\ \mu \bar{k} I(t) S(t) + \alpha \bar{k} S(t) (S(t) + D(t) + R(t) + Q(t)), \\ 0. \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中: $A = -(\delta + \varepsilon + \rho(t))$, $B = -(\xi + \rho(t))$ 。

设 $K(x(t)) = A(t)x(t) + F(x(t))$, 由于系统 (1) 的系数都是有界的, 所以 $|K(x_1)| - |K(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$, 其中 M 是正常数, 由于 $S(t), D(t), I(t), R(t), Q(t) > 0$ 的限制, 可以得出系统 (1) 存在一个非负解 [8]。

为求解最优控制问题 (4), 定义一个 Hamilton 函数:

$$\begin{aligned} H(x, u, \tau) = & L(x, u) + [\tau_1(t) \frac{dS(t)}{dt} \\ & + \tau_2(t) \frac{dD(t)}{dt} + \tau_3(t) \frac{dI(t)}{dt} \\ & + \tau_4(t) \frac{dR(t)}{dt} + \tau_5(t) \frac{dQ(t)}{dt}] \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $L(x, u) = aS(t) + \frac{1}{2}b\rho^2(t)$ 是 Lagrange 函数, $\tau_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$

是伴随函数。

定理 2 最优控制问题 (4) 存在一个最优控制。

证明 由于控制变量 $\rho(t)$ 和状态变量 $S(t)$ 、 $D(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 、 $Q(t)$ 都是非负的，所以目标泛函是凸的。显而易见，控制集 U 是闭的凸集， L 在控制集上也是凸的，且明显存在 $C_1, C_2 > 0$ ，使得 $L(x, u) \geq C_1 |u|^2 - C_2$ ，因此由最优控制问题成立条件^[9]可知。在控制问题 (4) 中存在一个最优控制 u^* 。

定理 3 设 $(S^*(t), D^*(t), I^*(t), R^*(t), Q^*(t))$ 是对应 $u^*(t)$ 的状态变量，则存在伴随函数 $\tau_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 使得：

$$\begin{cases} \frac{d\tau_1(t)}{dt} = -a - \tau_1(t)[\lambda \bar{k} I(t) - \alpha \bar{k}(D(t) + R(t)) \\ \quad + Q(t) + 2S(t)] - (\delta + \varepsilon + \rho(t)) \\ \quad - \tau_2(t)\beta \bar{k} I(t) + \tau_3(t)(\lambda + \beta + \mu) \bar{k} \\ \quad * I(t) - \tau_4(t)[\mu \bar{k} I(t) + \alpha \bar{k}(D(t) \\ \quad + R(t) + Q(t) + 2S(t)) + \delta] - \tau_5(t)\varepsilon, \\ \frac{d\tau_2(t)}{dt} = \tau_1(t)(\alpha \bar{k} S(t) - \xi) + \tau_2(t)(\xi + \rho(t)) \\ \quad - \tau_3(t)\alpha \bar{k} S(t), \\ \frac{d\tau_3(t)}{dt} = -\tau_1(t)\lambda \bar{k} S(t) - \tau_2(t)\beta \bar{k} S(t) \\ \quad + \tau_3(t)((\lambda + \beta + \mu) \bar{k} S(t) + \rho(t)) \\ \quad - \tau_4(t)\mu \bar{k} S(t), \\ \frac{d\tau_4(t)}{dt} = \tau_1(t)\alpha \bar{k} S(t) - \tau_4(t)(\alpha \bar{k} S(t) - \rho(t)), \\ \frac{d\tau_5(t)}{dt} = \tau_1(t)\alpha \bar{k} S(t) - \tau_4(t)(\alpha \bar{k} S(t) - \gamma) \\ \quad + \tau_5(t)(\gamma + \rho(t)). \end{cases} \quad (9)$$

其横截条件为：

$$\tau_1(T) = \tau_2(T) = \tau_3(T) = \tau_4(T) = \tau_5(T) = 0. \quad (10)$$

且最优控制 $u^*(t)$ 的分量 $\rho^*(t)$ 有以下形式：

$$\rho^*(t) = \min\{\max\{\underline{\rho}, \frac{\Upsilon}{b}\}, \bar{\rho}\}. \quad (11)$$

证明 由极大 / 极小值原理^[10-11]可知，存在伴随函数 $\tau_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 使得 $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ ，即：

$$\begin{cases} \frac{d\tau_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \tau)}{\partial S(t)}, \\ \frac{d\tau_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \tau)}{\partial D(t)}, \\ \frac{d\tau_3(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \tau)}{\partial I(t)}, \\ \frac{d\tau_4(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \tau)}{\partial R(t)}, \\ \frac{d\tau_5(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \tau)}{\partial Q(t)}. \end{cases} \quad (12)$$

因此式 (9) 成立。

根据极值条件 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ ，有 $\frac{\partial H}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=\rho^*} = 0$ ，因此：

$$\begin{aligned} b\rho^* - \tau_1(t)S^*(t) - \tau_2(t)D^*(t) - \tau_3(t)I^*(t) \\ - \tau_4(t)R^*(t) - \tau_5(t)Q^*(t) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

即：

$$\rho^* = \frac{\tau_1(t)S^*(t) + \tau_2(t)D^*(t) + \tau_3(t)I^*(t) + \tau_4(t)R^*(t) + \tau_5(t)Q^*(t)}{b} \quad (14)$$

根据最优控制中的容许控制集的定义有：

$$\rho^* = \begin{cases} \underline{\rho}, & \text{若 } \frac{\Upsilon}{b} \leq \underline{\rho}, \\ \frac{\Upsilon}{b}, & \text{若 } \underline{\rho} < \frac{\Upsilon}{b} < \bar{\rho}, \\ \bar{\rho}, & \text{若 } \frac{\Upsilon}{b} \geq \bar{\rho}. \end{cases} \quad (15)$$

式中：

$$\begin{aligned} \Upsilon = & \tau_1(t)S^*(t) + \tau_2(t)D^*(t) + \tau_3(t)I^*(t) \\ & + \tau_4(t)R^*(t) + \tau_5(t)Q^*(t). \end{aligned}$$

所以最优控制中的控制分量 $\rho^*(t)$ 可以表示为：

$$\rho^*(t) = \min\{\max\{\underline{\rho}, \frac{\Upsilon}{b}\}, \bar{\rho}\} \quad (16)$$

证明完毕。

将 $u^* = \rho^*$ 带入系统 (1) 中，得：

$$\begin{cases} \frac{dS^*(t)}{dt} = \lambda \bar{k} I^*(t) S^*(t) - \alpha \bar{k} S^*(t) (S^*(t) \\ \quad + D^*(t) + R^*(t) + Q^*(t)) + \xi D^*(t) \\ \quad - (\delta + \varepsilon) S^*(t) - \min\{\max\{\underline{\rho}, \frac{\Upsilon}{b}\}, \\ \quad \bar{\rho}\} S^*(t), \\ \frac{dD^*(t)}{dt} = \beta \bar{k} I^*(t) S^*(t) - \xi D^*(t) - \min\{ \\ \quad \max\{\underline{\rho}, \frac{\Upsilon}{b}\}, \bar{\rho}\} D^*(t), \\ \frac{dI^*(t)}{dt} = \mu - (\lambda + \beta + \mu) \bar{k} I^*(t) S^*(t) - \min\{ \\ \quad \max\{\underline{\rho}, \frac{\Upsilon}{b}\}, \bar{\rho}\} I^*(t), \\ \frac{dR^*(t)}{dt} = \mu \bar{k} I^*(t) S^*(t) + \alpha \bar{k} S^*(t) (S^*(t) \\ \quad + D^*(t) + R^*(t) + Q^*(t)) + \delta S^*(t) \\ \quad + \gamma D^*(t) - \min\{\max\{\underline{\rho}, \frac{\Upsilon}{b}\}, \\ \quad \bar{\rho}\} R^*(t), \\ \frac{dQ^*(t)}{dt} = \varepsilon S^*(t) - \gamma Q^*(t) - \min\{ \\ \quad \max\{\underline{\rho}, \frac{\Upsilon}{b}\}, \bar{\rho}\} Q^*(t). \end{cases} \quad (17)$$

则 Hamilton 函数可改写为：

$$\begin{aligned} H(x^*, u^*, \tau) = & aS^*(t) + \frac{1}{2}b(\rho^*)^2(t) \\ & + [\tau_1(t)\frac{dS^*(t)}{dt} + \tau_2(t)\frac{dD^*(t)}{dt} \\ & + \tau_3(t)\frac{dI^*(t)}{dt} + \tau_4(t)\frac{dR^*(t)}{dt} \\ & + \tau_5(t)\frac{dQ^*(t)}{dt}]. \end{aligned} \quad (18)$$

3 数值模拟

本节为验证最优控制策略得到的理论结果。考虑随机网络，并设网络平均度 $\bar{k} = 6$ ，图 2 和图 3 模拟传播者数量随着时间的改变而变化的过程。其中，令 $\psi = 0.0001$ ， $\lambda = 0.000001$ ， $\alpha = 0.0000001$ ， $\beta = 0.0000001$ ， $\delta = 0.001$ ， $\varepsilon = 0.0001$ ，

$\gamma=0.000\ 02$, $\xi=0.000\ 000\ 1$ 。在图 2 中, 令 $\rho=0.000\ 000\ 5$, 得到实行常值控制的曲线图, 使得基本再生数 $R_0 \approx 1.110\ 596 > 1$ 。图 3 是实行最优控制后得到的传播者数量变化曲线图。经过对比可以看出, 实行最优控制策略中的传播者数量可以在更短的时间内减少到 0, 表示谣言能在更短的时间内消失, 使总损失取得极小值。

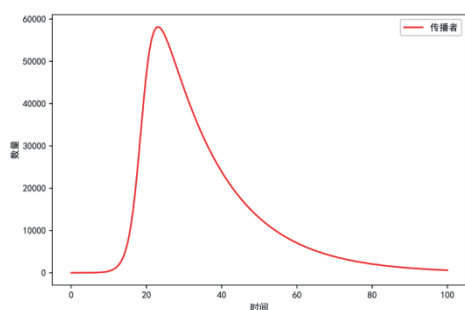


图 2 常值控制的情形

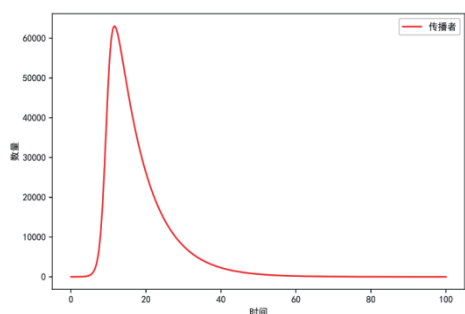


图 3 最优控制的情形

4 结论

复杂网络上的谣言传播的最优控制问题有很多实际应用背景。本文针对 SIRDQ 谣言传播模型提出一个带控制的谣言传播模型, 提出了一个最优控制问题, 并运用最优控制理论证明最优控制的存在性, 找到一个使总损失最小的动态策略。同时, 运用 Python 进行数值模拟验证了理论结果的有效性。本文的研究工作进一步丰富了最优控制问题的理论基础。

参考文献:

- [1]LI J X, REN N, JIN Z.An SICR rumor spreading model in heterogeneous network-s[J]. Discrete & continuous dynamical systems-B, 2017,25: 1497-1515.
- [2]CHEN C D, GAO D P, GUO P. The stationary distribution of a stochastic rumor spreading model[J]. Aims mathematics, 2021, 6(2): 1234-1248.
- [3]VEGA-OLIVEROS D A, COSTA L, RODRIGUES F A.Influence maximization by rumor spreading on correlated networks through community identification[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2020: 105094.

- [4]CHENG Y, HUO L, MA L, et al. Dynamical behaviors and spatial diffusion in a psychologically realistic rumor spreading model[J]. International journal of modern physics C, 2019, 31(2): 2050034.
- [5]LI P, YANG X, XIONG Q, et al. Defending against the advanced persis-tent threat: an optimal control approach[J]. Security and communication net-works, 2018,2018: 1-14.
- [6]DALEY D J, KENDALL D G. Stochastic rumours[J]. Journal of applied mathematics,1965,1(1): 42-55.
- [7]GERSHWIN S, JACOBSON D. A controllability theory for nonlinear systems[J]. IEEE transactions on automatic control, 1971, 16(1): 37-46.
- [8]BIRKHOFF G, ROTA C G. Ordinary differential equations[M]. New York: John Wileyand Sons, 1989: 75-119.
- [9]LUKES L D. Differential equations: classical to controlled[M]. Mathematics in science and engineering, academic press, 1982, 162: 291-292.
- [10]PONTYRAGIN S L, BOLTYANSKII G V, GAMKRELIZDE V R, et al. The mathematical theory of optimal processes[M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986: 493-494.
- [11]MORTON K I, NANCY S L. Dynamics optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management[M]. The Netherlands: Elsevier Science, 2000: 218-234.
- [12]YANG S, JIANG H, et al. Dynamics of the rumor-spreading model with hesitation mechanism in heterogeneous networks and bilingual environment[J].Advances in difference equations, 2020,1: 628.
- [13]ZHU L, ZHOU M, LIU Y, et al.Nonlinear dynamic analysis and optimum control of reaction-diffusion rumor propagation models in both homogeneous and heterogeneous networks[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2021,502(2):125260.
- [14]NDII M Z, BERKANIS F R, TAMBARU D, et al. Optimal control strategy for the effects of hard water consumption on kidney-related diseases[J].BMC research notes, 2020, 13(201): 1-9.
- [15]HUO L, DONG Y.Analyzing the dynamics of a stochastic rumor propagation model incorporating media coverage[J]. Mathematical methods in the applied sciences, 2020, 43: 6903-6920.

【作者简介】

张威(1996—), 女, 贵州贞丰人, 硕士, 助教, 研究方向: 最优控制理论及应用。

(收稿日期: 2024-01-23)