

基于卷积核逼近的图像选择性分割算法

徐思敏¹ 韦晟涛¹ 左沐雨¹ 方可雨¹

XU Simin WEI Shengtao ZUO Muyu FANG Keyu

摘要

选择性分割是指按照某种方式对图像中感兴趣的单个特定目标的局部分割。活动轮廓模型已被广泛应用于图像选择性分割,且利用水平集函数隐式表示轮廓进行演化是当前主流的求解算法之一。但是水平集方法存在高计算负担和数值不稳定性的问题,需要额外技术来解决这一缺陷。利用卷积核逼近思想,用热核卷积特征函数来近似周长,提出了一个新的图像选择性分割模型,并设计了基于交替极小化和迭代卷积阈值法(ICTM)的模型求解算法,同时给出相关理论证明算法的收敛性。还对MR图像、CT图像、真实图像进行大量的数值实验,并与BC、SC、RCI模型的算法进行对比,实验结果验证该算法不仅能够达到预期的分割结果,并且在收敛速度上有明显的提升。

关键词

选择性分割;卷积核逼近;特征函数;迭代卷积阈值法;交替极小化

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2024.11.008

0 引言

图像分割是图像处理和计算机视觉等领域的重要研究内容之一,目前在医学图像处理、物体识别、视频分析、交通管理系统、监控和自动化操作等领域中有广泛应用。根据分割的目标区域,图像分割可以大致分为两种类型:一种是全局分割,将图像中所有的前景对象与背景对象分离;另一种是选择性分割,将图像中的特定对象与背景和其他对象分离。

基于全局分割的模型大致可分为两类:第一类是基于边缘的模型,如测地活动轮廓模型(geodesic active contour, GAC)^[1]和蛇模型(Snake)^[2],其初始轮廓的选取往往会对这类模型的分割效果产生较大影响;第二类是基于区域的模型,如Mumford-Shah(MS)模型^[3]和Chan-Vese(CV)模型^[4],该类模型利用图像中物体呈分片区域的特点,通过求最接近图像边界的分段光滑函数的最优解来实现分割。

本文研究的重点是图像的选择性分割。选择性分割的优势在于将图像中感兴趣的特定目标提取出来,从而避免图像中无效信息的干扰。2010年,Badshah等人提出Badshah-Chen选择性分割模型^[5],又称BC模型。该模型将活动轮廓的新距离约束纳入到CV模型中,对目标区域的强度进行约束,从而可以较好分割同质区域,但对灰度异质或边界模糊的图像分割效果较差,且对初始轮廓的选取较为敏感。基于此,Spencer等人基于BC模型的基础上,将距离拟合惩罚

作为能量泛函中的独立项,使用凸松弛和精确的惩罚项将模型重新表述为凸的形式,提出了Spencer-Chen选择性分割模型^[6],简称SC模型。该模型对初始轮廓的选取具有一定的鲁棒性,但在分割含强噪声和边缘模糊的图像时依然表现较差。之后,Roberts等人^[7]在变分框架中引入测地距离来代替传统的欧氏距离,提出一个凸的选择性分割模型,简称RCI模型。文献[7]改进了测地惩罚项,对初始轮廓的输入具有鲁棒性,且在分割含噪声和模糊边界的图像时能达到较高精度。然而,文献[7]利用加性算子分裂(additive operator splitting, AOS)算法^[8-9]求解RCI模型,计算复杂耗时,效率较低。

最近,Ma等人^[10]用热核卷积特征函数隐式表示演化轮廓,对测地活动轮廓泛函进行近似,并推导出一种迭代卷积阈值法(iterative convolution thresholding method, ICTM)来使能量泛函最小化。该算法计算效率高且在迭代中保持稳定。针对RCI模型存在的计算效率低问题,本文受Wang等人采用的一种新的周长公式启发^[11],结合卷积核逼近对RCI模型做出进一步改进,提出一种新的图像选择性分割算法。

1 基于水平集方法的分割模型

本文中, $z: \mathbf{x} \in \Omega \rightarrow R$ 为输入图像, $\Omega \subset R^2$ 为具有Lipschitz边界的有界图像域, Γ 为闭合轮廓曲线。

2019年,Roberts等人用改进的测地距离 D_G 代替传统的欧氏距离,提出RCI选择性分割模型,该模型能够准确地反映标记集中图像像素的真实相似性,具体表现形式为:

$$F_{\text{RCI}}(\Gamma, c_1, c_2) = \mu \int_{\Gamma} g(|\nabla z|) \mathrm{d}s + \theta \int_{\text{inside}(\Gamma)} D_G \mathrm{d}\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\text{inside}(\Gamma)} (z - c_1)^2 \mathrm{d}\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\text{outside}(\Gamma)} (z - c_2)^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \quad (1)$$

其水平集形式为:

$$\min_{\varphi, c_1, c_2} \left\{ \mu \int_{\Omega} g(|\nabla z|) |\nabla H(\varphi)| \mathrm{d}\mathbf{x} + \theta \int_{\Omega} D_G H(\varphi) \mathrm{d}\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} (z - c_1)^2 H(\varphi) \mathrm{d}\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} (z - c_2)^2 (1 - H(\varphi)) \mathrm{d}\mathbf{x} \right\} \quad (2)$$

式中: D_G 表示距离标记集的边缘加权测地距离, 可通过求解如下偏微分方程得到:

$$\begin{aligned} |\nabla D_M^0(x, y)| &= f(x, y), (x, y) \in \Omega \setminus M \\ D_M^0(x, y) &= 0, (x, y) \in M \\ D_G(x, y) &= \frac{D_M^0(x, y)}{\|D_M^0(x, y)\|_{L^\infty}} \end{aligned} \quad (3)$$

式中: 函数 $f(x, y)$ 是依据图像的灰度、边缘模糊及噪声等特征构造的。若 $f(x, y) \equiv 1$ (即 $|D_M^0(x, y)| = 1$), 则距离惩罚项 $D_G(x, y)$ 为归一化的欧几里得距离 $D_E(x, y)$ 。进一步, 记 $u := H(\varphi)$, 则式 (1) 转化为:

$$\min_{u \in [0, 1], c_1, c_2} \left\{ \mu \int_{\Omega} g(|\nabla z|) |\nabla u| \mathrm{d}\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} (z - c_1)^2 u \mathrm{d}\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} (z - c_2)^2 (1 - u) \mathrm{d}\mathbf{x} + \theta \int_{\Omega} D_G u \mathrm{d}\mathbf{x} \right\} \quad (4)$$

由此证明, 式 (4) 中关于 u 的能量泛函是非凸的。Roberts 等人将 u 的取值范围凸松弛到 $[0, 1]$ 上, 并引入约束惩罚项 $v(u) := \max\{0, 2|u - 1/2| - 1\}$, 得到如下模型:

$$\min_{u, c_1, c_2} \left\{ \int_{\Omega} [\lambda_1 (z - c_1)^2 - \lambda_2 (z - c_2)^2] u \mathrm{d}\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega} g(|\nabla z|) |\nabla u| \mathrm{d}\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} v(u) \mathrm{d}\mathbf{x} + \theta \int_{\Omega} D_G u \mathrm{d}\mathbf{x} \right\} \quad (5)$$

不难发现, 式 (5) 中关于变量 u 的能量泛函是凸的。文献 [7] 利用交替极小化求解该模型, 首先固定 c_1, c_2 为:

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} u z \mathrm{d}\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u \mathrm{d}\mathbf{x}}, \quad c_2 = \frac{\int_{\Omega} (1 - u) z \mathrm{d}\mathbf{x}}{\int_{\Omega} (1 - u) \mathrm{d}\mathbf{x}} \quad (6)$$

然后使用 AOS 算法对 u 进行求解, 独立地计算每个维度的问题, 得到结果然后相加。基于 AOS 算法^[12]的分割模型能够得到较好的分割结果, 但是求解速度过慢。

2 本文模型

2.1 基于卷积核逼近的轮廓表示

对于输入图像 I_0 , 除了参数曲线、水平集函数, 还可以用卷积核逼近法表示其中待分割目标的边界轮廓的演化, 利用热核卷积特征函数表示轮廓的定义为:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_{\Gamma} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

式中: Γ 表示所需目标的边界, Ω_{Γ} 表示边界 Γ 的内部区域。卷积核逼近法提供了一种隐式表示曲线的方法, 不仅能够同水平集函数表示法一样自然地处理拓扑变化, 而且能够提高

计算效率和算法的稳定性。

进一步, 利用 u 来近似一般边界积分^[13]为:

$$\int_{\Gamma} g \mathrm{d}s \approx \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} g u G_{\tau} * (1 - u) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

式中: $\tau > 0$, $*$ 表示两函数之间的卷积, 其中:

$$G_{\tau}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\tau}\right) \text{ 为高斯核函数。}$$

2.2 本文模型及算法

本文将式 (1) 中的轮廓曲线 Γ 用 $u(\mathbf{x})$ 的隐式表示, 得到如下的能量泛函形式为:

$$\begin{aligned} E^{\tau}(u) &= \lambda_1 \int_{\Omega} (z - c_1)^2 u + \lambda_2 \int_{\Omega} (z - c_2)^2 (1 - u) + \\ &\quad \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} u G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 - u)) + \theta \int_{\Omega} D_G u \mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (8)$$

式中: τ 是正参数。

本文模型的求解可以表示为:

$$u^* = \arg \min_{u \in B} E^{\tau}(u) \quad (9)$$

其中:

$$B := \{u \in BV(\Omega, \mathbb{R}) \mid u = \{0, 1\}\} \quad (10)$$

很容易看出, 式 (10) 是非凸的, 为了解决这个问题将 B 做如下凸化:

$$K := \{u \in BV(\Omega, \mathbb{R}) \mid u \in [0, 1]\} \quad (11)$$

并推导出如下问题:

$$u^* = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u) \quad (12)$$

本文在引理 1 中证明了能量泛函极小化问题 (9) 和 (12) 是等价的。

引理 1 假设 u^* 是 (9) 的解, 则它同为 (12) 的解, 反之也成立。

证明: 令 $\hat{u} = \arg \min_{u \in M} E^{\tau}(u)$, 可得 $E^{\tau}(\hat{u}) = \min_{u \in M} E^{\tau}(u)$, 则 $\arg \min_{u \in M} E^{\tau}(u) \in K$, 又 B 是 K 的真子集, 可以得到 $E^{\tau}(\hat{u}) \geq \min_{u \in K} E^{\tau}(u)$ 。再令 $\tilde{u} = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u)$, 可以证明 $\tilde{u} = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u) \in B$ 。假设 $\tilde{u} = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u) \notin B$, 则 $\exists a \in A$, 对于 $\forall x \in A$, 极小值点 u^* 满足 $u^*(x) \in (a, 1-a)$, 其中 $A \subseteq \Omega$, A 表示一个非零测度集。令 $u^i = u^* + t\chi_A$, 其中 χ_A 表示 A 的特征方程, 有:

$$\begin{aligned} E^{\tau}(u^i) &= \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \lambda_1' (c_1 - S)^2 (u^* + t\chi_A) + \lambda_2' (c_2 - S)^2 \\ &\quad (1 - u^* - t\chi_A) + (u^* + t\chi_A) G_{\tau} * (1 - u^* - t\chi_A) \mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned}$$

对于 $|t| < a$, 求得 $E^{\tau}(u^i)$ 的一阶、二阶导表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E^{\tau}(u^i)}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \lambda_1' (c_1 - S)^2 \chi_A - \lambda_2' (c_2 - S)^2 \chi_A + \\ &\quad \chi_A G_{\tau} * (1 - u^* - t\chi_A) + (u^* + t\chi_A) (G_{\tau} * (-\chi_A)) \mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned}$$

且由:

$$\frac{\mathrm{d}^2 E^{\tau}(u^i)}{\mathrm{d}t^2} = -2\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \chi_A G_{\tau} * \chi_A \mathrm{d}\mathbf{x}$$

可得 $\frac{d^2 E^\tau(u')}{dt^2} < 0$, 而因 u^* 为极小值点可得 $\frac{d^2 E^\tau(u')}{dt^2} \geq 0$, 矛盾。故 $\bar{u} \in B$, 并且, 存在

$$E^\tau(\bar{u}) = \min_{u \in K} E^\tau(u) \geq E^\tau(\bar{u})$$

即 $E^\tau(\bar{u}) = \min_{u \in M} E^\tau(u) = \min_{u \in K} E^\tau(u) = E^\tau(\bar{u})$ 。证毕。

接下来, 用 ICTM 来求解问题 (12)。首先, 计算 $E^\tau(u)$ 在第 k 次迭代 u^k 处的一阶泰勒展开式:

$$L^\tau(u, u^k) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} u \cdot \phi^k dx$$

式中: $\phi^k = \sqrt{g} G_\tau * (\sqrt{g}(1-2u^k)) + \lambda_1(z-c_1)^2 - \lambda_2(z-c_1)^2 + \theta D_G$

接着, 通过求解以下线性化问题得到第 $k+1$ 次迭代的 u^{k+1} :

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in K} L^\tau(u, u^k)$$

这可以用一种点态方式求解, 对于 $\forall x \in \Omega$, 可以解出:

$$u^{k+1}(x) = \arg \min_{u(x) \in [0,1]} u(x) \phi^k(x)$$

由于凸集上的线性泛函的最小值必须在边界上达到最小值, 得到:

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} 1, & \phi(x) \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

且 c_1 、 c_2 可通过以下交替极小化公式求解:

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} z u dx}{\int_{\Omega} u dx}, c_2 = \frac{\int_{\Omega} z(1-u) dx}{\int_{\Omega} (1-u) dx} \quad (14)$$

本文算法总结如算法 1。

算法 1 求解模型 (12) 的算法

输入: 图像边缘检测函数 $g, \tau > 0, \lambda$

初始赋值: $u^0 \in B$

迭代: 更新 u^{k+1}

$$\phi^k(x) = \sqrt{g} G_\tau * (\sqrt{g}(1-2u^k)) + \lambda_1(z-c_1)^2 - \lambda_2(z-c_2)^2 + \theta D_G$$

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} 1, & \phi(x) \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$c_1^{k+1} = \frac{\int_{\Omega} z u^{k+1} dx}{\int_{\Omega} u^{k+1} dx}, c_2^{k+1} = \frac{\int_{\Omega} z(1-u^{k+1}) dx}{\int_{\Omega} (1-u^{k+1}) dx}$$

迭代终止条件: u^{k+1} 收敛于 u^*

输出: $u^* \in B$, 即为分割结果。

3 实验结果及分析

在本节中, 展示了三组图像分割实验, 以证明本文所提出的基于卷积核逼近的算法, 相比于 BC 模型、SC 模型、RCI 模型可以得到相当甚至更好的分割效果, 尤其是本文算法实验的迭代次数明显减少。为了更加具体地展示各个模型实验结果之间的优劣, 尤其是一些细微的差别, 将利用 Dice 相似系数^[14] (DSC) 和 Hausdorff 距离^[15] (HD), 作为不同算法分割精度的评价指标, 定义为:

$$DSC(S_1, S_2) := \frac{2|S_1 \cap S_2|}{|S_1| + |S_2|} \times 100\% \quad (15)$$

$$HD(A, B) := \max \left(\frac{1}{n} \sum_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|, \frac{1}{n} \sum_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\| \right) \quad (16)$$

式中: S_1 代表分割后目标物体的区域, S_2 代表对应的真实区域; n 指分割目标边界集的总数, A 为分割后的二值图像, B 是相应的真实二值图像。显然: DSC 值越高, HD 值越低, 表明分割结果越精确。

3.1 参数设置

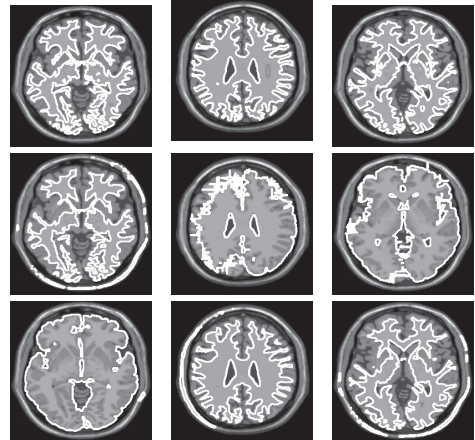
在下面的四组实验中, 为了方便实验的操作, 将设置参数 $\tau = 0.01$, $\lambda_1 = \lambda_2$ 。另外 θ 是本文算法测地距离项的参数, 在实验中, 为了得到最佳的分割结果将不断调整参数 λ_1 、 λ_2 、 θ , 直至效果最佳, 具体实验最终取值如表 1 所示。实验终止准则设置为 $Tol = 10^{-4}$ 。

表 1 本文算法分割不同图像参数 λ_1 、 λ_2 、 θ 的取值

图像	λ_1 、 λ_2	θ
a	1.1	2
b	1.1	1.5
c	1	1.8
d	20	2
e	6	1.5
f	20	1.8
g	2	100
h	2	185
i	2	182
j	2	9
k	5	40
l	2	100
m	2	10 000

3.2 数值实验

首先, 将用本文算法和 BC 算法、SC 算法、RCI 算法对三幅 MR 图像中脑白质进行分割实验。图 1 展示了本文提出模型和其他模型在 (a) (b) (c) 三幅图像上的分割结果。第一行为带有标记集 (灰色线) 和 groundtruth (白色线) 的原始图像; 后面依次是 BC 模型、SC 模型、RCI 模型和本文模型的分割结果 (白色线)。



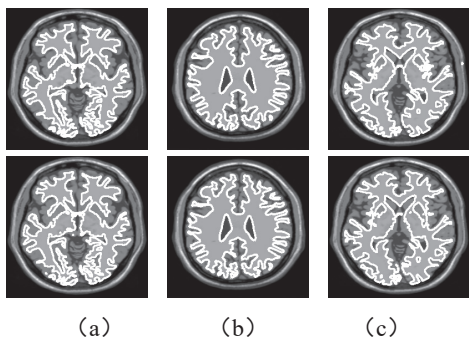


图 1 不同算法对 MR 脑图像中脑白质的分割结果

基于图 1 的分割结果发现, BC 模型和 SC 模型未完全分割出 MR 图像中的脑白质, 相比之下, RCI 模型和本文模型分割结果较好。紧接着, 通过表 2 给出的数值结果发现, 本文算法在分割三幅 MR 脑部图像的 DSC 值和 HD 值都是最佳的。除此之外, 本文算法的迭代收敛步数及收敛时间远远小于其他模型。

表 2 图 1 中分割结果的 DSC、HD 值、迭代收敛步数及收敛时间

图像	评估指标	BC	SC	RCI	本文模型
图 a	DSC	60.71%	85.23%	90.24%	90.42%
	HD	4.719 2	2.526 1	1.608 2	1.607 7
	iters	400	722	1057	8
	Time/s	65.069 7	56.551 5	78.375 3	2.986 1
图 b	DSC	75.94%	92.81%	95.73%	96.66%
	HD	3.764 3	2.151 9	1.424 4	1.167 2
	iters	80	300	450	7
	time/s	12.095 5	37.834 0	35.948 3	3.356 8
图 c	DSC	65.10%	86.47%	91.06%	91.27%
	HD	4.625 2	2.466 2	1.614 7	1.579 7
	iters	500	706	1111	5
	time/s	76.063 1	52.799 7	82.664 1	3.578 1

注: 加粗字体是每列最佳值

进一步, 图 2 给出了不同算法对边缘模糊的 CT 图像的分割结果。第一行为带有标记集(灰色线)和 groundtruth(白色线)的原始图像; 后面依次是 BC 模型、SC 模型、RCI 模型和本文模型的分割结果(白色线)。不难发现, BC 模型和 SC 模型的分割结果中存在过度分割的现象, BC 模型这一缺陷尤为突出。RCI 模型和本文模型的分割结果较好。

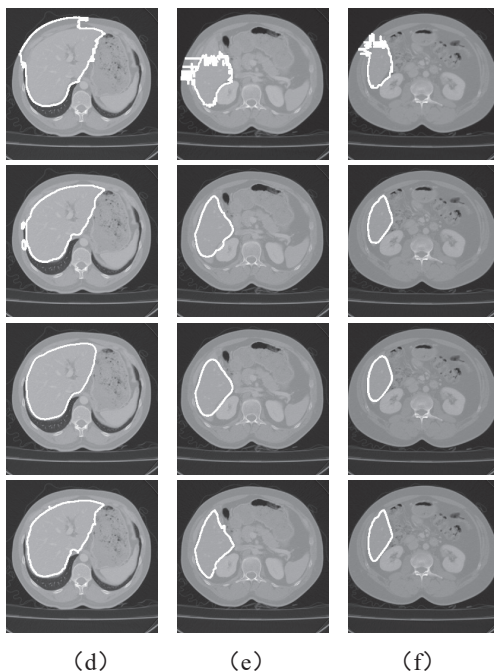
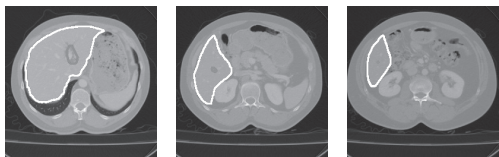


图 2 不同算法对 CT 图像的分割结果

为了更直观的展示不同算法的优劣, 表 3 给出了不同算法的 DSC、HD 等指标, 可以看出, 本文算法对这三个图像的分割, 多项指标都是最佳, 表明本文算法分割精度高, 且收敛速度快。

表 3 图 2 中分割结果的 DSC、HD 值、迭代收敛步数及收敛时间

图像	评估指标	BC	SC	RCI	本文模型
图 d	DSC	86.56%	97.88%	97.45%	98.73%
	HD	1.651 8	0.651 1	0.608 8	0.534 7
	iters	20	467	3065	22
	time/s	5.312 3	45.228 0	254.274 5	2.933 6
图 e	DSC	82.71%	94.44%	92.92%	98.10%
	HD	0.892 4	0.383 0	0.485 9	0.224 4
	iters	20	800	6171	14
	time/s	6.820 3	121.934 0	612.084 9	2.514 0
图 f	DSC	86.71%	95.97%	93.99%	98.78%
	HD	0.473 1	0.142 1	0.232 5	0.090 5
	iters	20	576	6114	6
	time/s	5.485 8	61.826 3	590.471 5	2.815 7

注: 加粗字体是指每列最佳值

最后, 将用本文算法对几种不同的医学图像(g)(h)(i)(j)进行分割。图 3 中, 第一行为初始图像, 第二行为分割结果。可以看出, 本文算法能够较好地识别真实图像待分割目标的边缘。

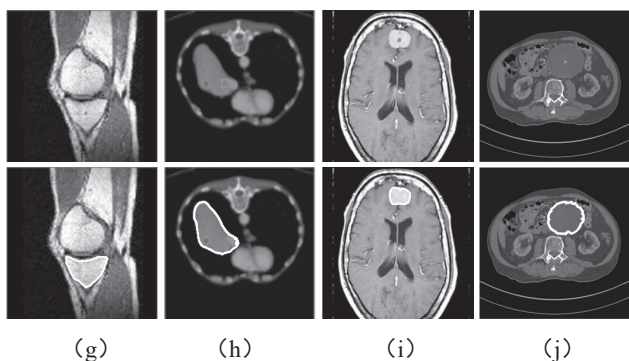


图3 本文算法对医学图像的分割结果

4 结语

本文在RCI模型的基础上,结合卷积核逼近方法,提出了一种新的基于卷积核逼近的选择性分割模型,并设计基于交替极小化和迭代卷积阈值法的模型求解算法。对多种不同类型的图像进行了数值实验,实验结果表明本文算法可取得良好的分割效果,且收敛速度更快。在后续的工作中,我们会尝试将本文所提算法应用到灰度不均匀和带强噪声的医学影像分割中,提高医学图像的实用性。

参考文献:

- [1] CASELLES V, KIMMEL R, SAPIRO G. Geodesic active contours[J]. International journal of computer vision, 1997, 22(1): 61-79.
- [2] KASS M, WITKIN A, TERZOPOULOS D. Snakes: Active contour models[J]. International journal of computer vision, 1988, 1(4): 321-331.
- [3] MUMFORD D, SHAH J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications on pure and applied mathematics, 1989, 42(5): 577-685.
- [4] CHAN T F, VESE L A. Active contours without edges[J]. IEEE transactions on image processing, 2001, 10(2): 266-277.
- [5] BADSHAH N, CHEN K. Image selective segmentation under geometrical constraints using an active contour approach[J]. Communications in computational physics, 2010, 7(4): 759-778.
- [6] SPENCER J, CHEN K. A convex and selective variational model for image segmentation[J]. Communications in mathematical sciences, 2015, 13(6): 1453-1472.
- [7] ROBERTS M, CHEN K, IRION K L. A convex geodesic selective model for image segmentation[J]. Journal of mathematical imaging and vision, 2019, 61(4): 482-503.
- [8] MERRIMAN B, BENCE J K, OSHER S. J. Motion of multiple junctions: a level set approach[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 112(2): 334-363.
- [9] ESEDOGLU S, TSAI Y H R. Threshold dynamics for the piecewise constant Mumford-Shah functional[J]. Journal of computational physics, 2006, 211(1): 367-384.
- [10] MA J, WANG D, WANG X P, et al. A characteristic function-based algorithm for geodesic active contours[J]. SIAM journal on imaging sciences, 2021, 14(3): 1184-1205.
- [11] WANG D, WANG X P. The iterative convolution-thresholding method (ICTM) for image segmentation[J]. Pattern recognition, 2022, 130(5): 108794.
- [12] ALI H, FAISAL S, CHEN K E, et al. Image-selective segmentation model for multi-regions within the object of interest with application to medical disease[J]. The visual computer, 2021, 37(5): 939-955.
- [13] MIRANDA M, PALLARA D, PARONETTO F, et al. Short-time heat flow and functions of bounded variation in R^N [C] // Annales de la Faculté des sciences de toulouse: mathématiques. 2007, 16(1): 125-145.
- [14] CRUM W R, CAMARA O, Hill D L G. Generalized overlap measures for evaluation and validation in medical image analysis[J]. IEEE transactions on medical imaging, 2006, 25(11): 1451-1461.
- [15] DUBUISSON M P, JAIN A K. A modified Hausdorff distance for object matching[C]//Proceedings of 12th International Conference on Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 1994: 566-568.

【作者简介】

徐思敏(1997—),女,安徽安庆人,硕士,助教,研究方向:非线性偏微分方程及其在图像处理中应用。

韦晟涛(2000—),男,江苏无锡人,本科,研究方向:非线性偏微分方程及其在图像处理中应用。

左沐雨(2001—),男,江苏无锡人,本科,研究方向:非线性偏微分方程及其在图像处理中应用。

方可雨(2001—),男,贵州遵义人,本科,研究方向:非线性偏微分方程及其在图像处理中应用。

(收稿日期:2024-08-08)