

一种改进卡尔曼滤波算法在组合导航中的应用

唐 硕¹ 易元森¹ 王 涛¹ 黄天旭^{1*}

TANG Shuo YI Yuansen WANG Tao HUANG Tianxu

摘 要

鉴于惯性导航系统与全球卫星定位系统在技术特性层面存在的优势互补性,基于扩展卡尔曼滤波的融合算法设计始终是导航领域的研究热点。然而,传统非线性滤波框架在实际应用中面临双重技术瓶颈:一方面,系统动力学模型的参数化偏差会引发误差积累效应;另一方面,观测噪声协方差矩阵的时变特性导致算法鲁棒性显著下降。值得注意的是,经典EKF算法在实现多源信息深度融合时,其性能边界受制于系统建模精度与噪声统计先验知识的完备程度,导致滤波结果次优。在INS/GPS组合导航系统中,文章提出了一种改进型迭代加权扩展卡尔曼滤波算法,该算法先定义权重函数,通过新息序列构造出预测误差判别统计量并计算权重因子,识别系统状态模型误差,研究在滤波算法中引入双重调节参数,自适应因子和权重因子对状态预测协方差矩阵和观测噪声协方差矩阵实施动态优化,最后引入迭代算法对状态估计误差进行判别与更新。仿真实验结果表明:所提算法相比扩展卡尔曼滤波和自适应扩展卡尔曼滤波算法,速度误差和位置误差均有降低,效果良好,证明了算法的有效性。

关键词

组合导航;扩展卡尔曼滤波;自适应扩展卡尔曼滤波;信息检测;自适应迭代加权

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2025.09.020

0 引言

在技术迭代持续加速的背景下,工业领域对空间定位与导航服务的精确性标准呈现指数级提升态势。实际应用中存在着多模态导航解决方案,各类系统均展现出独特的功能特性与性能边界,在此领域中,惯性导航系统(INS)与全球定位系统(GPS)已确立其主流地位。INS与GPS展现出的互补性特征,促使二者的协同工作机制成为学术界与工业界共同关注的焦点议题^[1]。多源导航融合架构通过集成INS与GPS的互补优势,实现精度增强与功能冗余的双重目标。该架构在保持子系统自主运行特性的前提下,通过时-频双域数据融合策略(包含位置矢量的状态空间融合与速度参数的观测空间融合),生成全维度运动学参数估计。基于卡尔曼滤波框架构建的误差补偿闭环机制,通过实时反馈校正策略有效抑制了惯性导航系统随时间累积的误差发散现象^[2]。这种将INS与GPS组合的方法已经被广泛应用于军事和国防等领域,具有广泛的实际应用价值。

多源导航系统的状态转移模型普遍具有非线性特征,其参数估计必须依赖非线性滤波理论。扩展卡尔曼滤波算法(EKF)是常采用的方法^[3]。EKF往往会在线性化过程中被

引入,进而导致滤波输出的结果误差变大,精度下降;而且以系统模型中噪声是高斯分布为前提,要充分了解噪声的统计特性^[4]。实际工程应用中,组合导航系统模型的构建面临双重挑战:一方面,系统动力学参数具有时变特性和未建模动态,导致精确解析模型的建立存在困难;另一方面,观测噪声的统计特性往往呈现非平稳特征且受多源干扰耦合影响,其随机分布参数难以通过离线标定准确获取。为了解决此类问题,可以采用自适应卡尔曼滤波算法^[5]。算法通过实时辨识系统模型参数漂移并动态标定噪声统计特性,构建双参数自适应调节机制,有效抑制模型失配与噪声干扰对导航精度的耦合影响。自适应卡尔曼滤波有多种方法,包括基于信息或残差的自适应滤波^[6]、衰减记忆滤波^[7]、Sage-Husa自适应滤波^[8]和渐消因子滤波^[9],通过调整状态预测矩阵的权重;杨元喜也提出了抗差卡尔曼滤波算法^[10],通过构造观测协方差等加权矩阵,降低粗差对滤波估计值的影响;研究者们也将迭代思想引入卡尔曼滤波中,即反复地去线性化量测方程,不断修正估计值,逐步减小误差。

为了从根本上提高组合导航系统的精度,本文在分析EKF算法和AEKF算法的基础上,将迭代思想和加权函数融入AEKF中,提出一种改进的自适应滤波算法。根据当前的状态估计和测量数据计算残差,并使用Tukey's biweight权重函数计算相应的权重^[11]。通过使用加权后的测量噪声矩阵来计算卡尔曼增益。基于预测误差的假设检验统计量构建自适

1. 广西城市职业大学 广西崇左 532100

[基金项目] 2024年度广西城市职业大学校级科研项目“GNSS/INS组合导航滤波算法优化研究”(GXCVUKY2024B002)

应调节因子, 通过单参数动态缩放协方差矩阵, 在抑制多参数耦合干扰的同时维持滤波稳定性。最后, 根据最新的状态估计, 并检查是否满足收敛条件。如果满足条件, 则停止迭代; 否则, 继续迭代更新状态估计。进而进行噪声估计和系统噪声调整, 从而提高滤波的精度和稳定性。该算法综合迭代加权与自适应滤波两者, 简单且鲁棒性好。

1 组合系统模型及扩展卡尔曼滤波

本文采用基于状态变换的扩展卡尔曼算法作为基础滤波器^[12], 采用北东地坐标系, 半解析式当地水平指北平台式惯性导航系统作为误差模型。选用平台误差角、速度误差、位置误差、陀螺漂移和加速度漂移作为惯性导航系统的状态变量。

$$\mathbf{X}_{k-1} = [(\phi^n)^T \ (\delta v_\phi^n)^T \ (\delta r^n)^T \ (\varepsilon^b)^T \ (\nabla^b)^T]^T \quad (1)$$

式中: ϕ^n 为 3 个方向的姿态误差; δv_ϕ^n 为 3 个方向的速度误差; δr^n 为 3 个方向的位置误差; ε^b 为 3 个方向的陀螺漂移; ∇^b 为 3 个方向的加速度计误差。

针对非线性系统的状态估计问题, 当前主流方法采用局部线性化近似策略。其中, 扩展卡尔曼滤波 (EKF) 作为基准算法, 其数学本质在于对非线性函数进行一阶泰勒近似。具体而言, 该方法以状态估计值的均值为展开点, 将非线性状态转移方程 $f(x)$ 与观测方程 $h(x)$ 分别进行雅可比矩阵线性化处理, 通过截断高阶无穷小项实现模型线性化重构。在此基础上构建的递推估计框架。

对于一个离散非线性系统, 其状态方程和观测方程分别表示为:

$$\mathbf{X}_k = f[k-1, \mathbf{X}_{k-1}] + \mathbf{G}_{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \quad (2)$$

$$\mathbf{Z}_k = h[k, \mathbf{X}_k] + \mathbf{v}_k \quad (3)$$

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \delta Z_{v_k} \\ \delta Z_{r_k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} v_{v_k, 3 \times 1} \\ v_{r_k, 3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{X}_{k-1}$ 和 $\mathbf{X}_k$ 为状态向量且在式 (1) 中已经定义; $\mathbf{Z}_k$ 为观测量; $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 为系统的非线性状态转移函数和观测函数; $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ 为过程噪声向量; $\mathbf{G}_{k-1}$ 为噪声转移矩阵; $\mathbf{v}_k$ 为测量噪声矩阵; δZ_{v_k} 为两者之间的速度误差; δZ_{r_k} 为两者之间的位置误差; $v_{v_k, 3 \times 1}$ 和 $v_{r_k, 3 \times 1}$ 为速度和位置对应的观测白噪声。

由系统状态方程 (2) 和观测方程 (3), 分别将非线性状态函数 $f(\cdot)$ 和观测函数 $h(\cdot)$ 围绕滤波值 $\mathbf{X}_{k-1}$ 进行泰勒展开, 并省略二阶及以上高阶项得到:

$$\mathbf{X}_k = f[k-1, \mathbf{X}_{k-1}] + \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{X}}_{k-1}} [\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}] + \mathbf{G}_{k-1} [\hat{\mathbf{X}}_{k-1}, k-1] \boldsymbol{\omega}_{k-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{Z}_k = h[\hat{\mathbf{X}}_{k-1}, k] + \frac{\partial h}{\partial \hat{\mathbf{X}}_k} [\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}] + \mathbf{v}_k \quad (6)$$

在式 (5) 中, 令:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{X}}_{k-1}} = \frac{\partial f[\hat{\mathbf{X}}_{k-1}, k-1]}{\partial \hat{\mathbf{X}}_{k-1}} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{k-1} = \mathbf{X}_{k-1}} = \mathbf{F}_{k,k-1} \quad (7)$$

$$f[k-1, \hat{\mathbf{X}}_{k-1}] - \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{X}}_{k-1}} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{k-1} = \mathbf{X}_{k-1}} \hat{\mathbf{X}}_{k-1} = \mathbf{f}(k-1) \quad (8)$$

则系统状态方程可表示为:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1} + \mathbf{f}(k) \quad (9)$$

在式 (6) 中, 令:

$$\frac{\partial h}{\partial \hat{\mathbf{X}}_k} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{k,k-1}} = \mathbf{H}_k \quad (10)$$

$$\mathbf{z}_k = h[\hat{\mathbf{X}}_{k,k-1}, k] - \frac{\partial h}{\partial \hat{\mathbf{X}}_k} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{k,k-1}} \hat{\mathbf{X}}_{k,k-1} \quad (11)$$

则系统观测方程可表示为:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad (12)$$

基于局部线性化模型, 扩展卡尔曼滤波构建了包含五步递推的经典架构:

$$\mathbf{X}_{k,k-1} = \mathbf{F}_{k,k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1} \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_{k,k-1} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k,k-1}) \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k,k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (17)$$

式中: $\mathbf{Q}_k$ 为过程噪声的对称非负正定矩阵; $\mathbf{R}_k$ 为观测噪声的对称正定矩阵。

2 算法分析

2.1 自适应扩展卡尔曼滤波

自适应扩展卡尔曼滤波 (AEKF), 其核心在于通过在线自适应校准策略实现模型先验信息与实时观测信息的优化融合。由扩展卡尔曼滤波可知, 信息可被定义为当前状态预测向量与观测值的差, 可表示为:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k \quad (18)$$

引入单因子 α_k ($0 < \alpha_k \leq 1$) 控制异常扰动和状态模型误差的影响, 自适应滤波风险函数为:

$$\mathbf{S}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{S}_k + \alpha_k (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k,k-1})^T \mathbf{P}_{k,k-1} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k,k-1}) = \min \quad (19)$$

式中: $\min$ 表示自适应滤波风险函数取最小值。

则自适应卡尔曼滤波解为:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k,k-1} + \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{X}_{k,k-1}) \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T (\frac{1}{\alpha_k} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k,k-1} \quad (22)$$

由于新息序列能够较好地反映系统状态模型的误差, 因此, 可以基于新息序列构造如下误差判别统计量:

$$\Delta \mathbf{S}_k = \left[\frac{\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k}{\text{tr}(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

自适应因子 α_k 为:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & \Delta S_k \leq c \\ \frac{c}{\Delta S_k}, & \Delta S_k > c \end{cases} \quad (24)$$

式中： c 为误差判别统计量的阈值，取值为 0.2~1。

2.2 自适应迭代加权扩展卡尔曼滤波

传统扩展卡尔曼滤波（EKF）采用一阶泰勒近似实现非线性系统局部线性化。这种线性化策略会导致状态估计偏差的累积效应，通过迭代的形式来缩小这种误差是一种措施。针对 EKF 的一阶泰勒近似导致的线性化误差，迭代优化策略通过动态调整线性化基准点实现误差抑制，从而提升滤波精度。

根据式（18），可得：

$$\hat{X}_k^{i+1} = \hat{X}_{k,k-1} + K_k^i [S_k^i - H_k^i (\hat{X}_{k,k-1} - \hat{X}_k^i)] \quad (25)$$

$$P_k^{i+1} = (I - K_k^i H_k^i) P_{k|k-1} \quad (26)$$

式中： i 为算法的迭代次数。

迭代终止判据定义为相邻状态估计的二范数差小于阈值 ε_0 ，其代数表达式为：

$$\|\hat{X}_k^i - \hat{X}_k^{i-1}\| < \varepsilon_0 \quad (27)$$

式中： $\hat{X}_k^i$ 为 k 时刻第 i 次迭代的状态估计值； $\hat{X}_k^{i-1}$ 为 k 时刻第 $i-1$ 次迭代的状态估计值；阈值 ε_0 的设定一般根据真实的应用数据分析来选择。

整体滤波的最优估计基于精确的误差统计特性和滤波模型。希望在迭代过程中，调节能放在不同的误差上，来提高准确度。本文引入抗差等加权矩阵思想，选择 Tukey's bi-weight 作为权重函数，以评估先验信息和观测信息对模型参数估计，从而平衡两者的贡献。其表达式为：

$$w(r) = \begin{cases} (1 - (r/p)^2)^2, & \text{if } |r| \leq p \\ 0, & \text{if } |r| > p \end{cases} \quad (28)$$

式中： r 表示数据点的值； p 表示一个常数，用于确定权重函数的截断范围，其取值一般为 3~5。

根据上文的预测残差来计算权重函数，可以得到加权后的测量噪声矩阵，表达式为：

$$R_{kw} = R_k \cdot w \quad (29)$$

同时结合自适应因子，从而卡尔曼滤波的增益矩阵为：

$$\bar{K} = \frac{1}{\alpha_k} P_{k,k-1} H_k^T \left(\frac{1}{\alpha_k} H_k P_{k,k-1} H_k^T + R_{kw} \right)^{-1} \quad (30)$$

3 实验结果与分析

本文通过 MATLAB 软件进行仿真实验，验证所提方法的有效性，实验使用了网上开源的 INS 和 GPS 车载移动测量系统数据，进行算法仿真。IMU 采样率为 200 Hz，GPS 采样率为 10 Hz，组合采样率为 10 Hz；具体仿真参数设置如表 1 所示。参照上文的组合导航系统模型及相关参数设置，本文采用基本扩展卡尔曼滤波算法、自适应扩展卡尔曼滤波算法和自适应迭代加权扩展卡尔曼滤波算法（AIWEKF）进行仿真对比。

表 1 仿真参数表

仿真参数	数值大小
地球半径	$R = 637\ 824\ 5\text{ m}$
地球自转角速度	$\omega_e = 7.29 \times 10^{-5}\text{ rad/s}$
偏心率	$EE = 0.081\ 819\ 190\ 842\ 6$
初始平台失准角	$\varphi_r = \varphi_e = \varphi_d = 0$
初始速度误差	$\delta V_n = \delta V_e = \delta V_d = 0.1\text{ m/s}$
初始位置误差	$\delta L = \delta \lambda = 5\text{ m}$
加速度计随机偏差均方差	$\Delta_N = \Delta_E = \Delta_D = 0.15\text{ mg}$
陀螺随机漂移均方差	$\varepsilon_N = \varepsilon_E = \varepsilon_D = 0.5\text{ (}^\circ\text{)/h}$

滤波结果如图 1~2 所示，评价指标包括 3 个方向的速度、位置误差以及均方根误差（RMS）。其中，深色虚线表示扩展卡尔曼滤波算法的误差，浅色虚线表示自适应扩展卡尔曼滤波算法的误差，直线表示自适应迭代加权扩展卡尔曼滤波算法的误差。

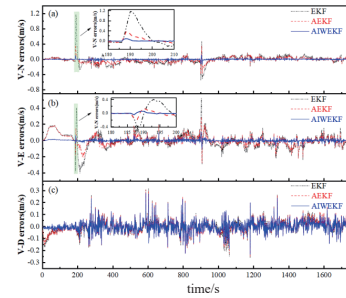


图 1 北、东、地 3 个方向速度误差

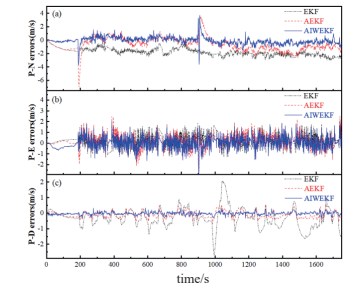


图 2 北、东、地 3 个方向位置误差

图 1 所示为 EKF、AEKF 和 AIWEKF 在北、东、地 3 个方向速度误差对比，由图 1 可知，在整个滤波过程中，相比于 EKF 和 AEKF，AIWEKF 误差更小，而且在误差突增的情况下依旧可以保持更高的精度，可以从东、北两个方向时间 200 s 左右放大的地方观察 AEKF 和 AIWEKF，都能一定程度减小了误差，且 AIWEKF 效果更为明显。但从误差图直观来看，北方向和东方向的误差都有减小，地方向的速度误差相差不大。

图 2 所示为 EKF、AEKF 和 AIWEKF 在北、东、地 3 个方向的位置误差对比，由图 2 可知，在整个滤波过程中，相对于 EKF 和 AEKF，AIWEKF 误差更小，直观来看北方向和地方向的误差减小更明显，误差波动范围明显缩小，误差曲线可以在相对短时间内得到收敛。

表 2 为三种算法的误差均方根，可以更直观地比较滤波的性能。

表 2 三种算法误差均方根统计表

算法	北方向速度误差 /(m·s ⁻¹)	东方向速度误差 /(m·s ⁻¹)	地方向速度误差 /(m·s ⁻¹)	北方向位置误差 /m	东方向位置误差 /m	地方向位置误差 /m
EKF	0.108 020	0.089 322	0.056 575	1.853 00	0.641 17	0.680 010
AEKF	0.065 247	0.062 038	0.055 024	1.198 80	0.651 82	0.245 730
AIWEKF	0.016 146	0.015 384	0.046 895	0.543 76	0.564 04	0.094 411

与 EKF 相比, AEKF 在北、东地方向速度估计精度分别提高了 39.6%、30.5%、2.7%, 位置估计精度分别提高了 35.3%、-1.7%、63.9%; 而 AIWEKF 在北、东地方向位置估计精度分别提高了 85.1%、82.8%、17.1%, 位置估计精度分别提高了 70.7%、12.0%、86.1%。由此可见, 除 AEKF 在东方向位置估计精度降低 1.7%, AEKF 和 AIWEKF 速度和位置精度均高于 EKF, 其中 AIWEKF 较有优势。证明自适应迭代加权扩展卡尔曼滤波算法对系统状态模型误差具有一定的抑制作用。

从以上仿真结果对比可以看出, EKF 在系统噪声变化和模型不准确时, 由于鲁棒性较差, 无法准确跟踪系统状态变化, 导致最终滤波输出的位置和速度误差较大。虽然 AEKF 在一定程度上能减小误差, 但效果有限。在相同仿真条件下, AIWEKF 算法通过迭代加权优化状态估计, 利用加权矩阵调整观测噪声矩阵, 并通过误差判别统计量选择自适应因子修正增益矩阵, 实现了动态调整, 从而有效减小了系统噪声对滤波结果的影响。

4 结语

本文基于新息检测的自适应调整和迭代加权算法, 提出自适应迭代加权扩展卡尔曼滤波算法应用于 INS/GPS 组合导航系统, 通过迭代方程得到更精确的状态量, 使用加权矩阵对测量噪声矩阵进行改变; 再通过创建误差判别统计量选取不同自适应因子修正增益, 减弱了系统噪声对滤波结果的影响, 进而误差协方差矩阵被修正。仿真结果表明, 相较于传统的 EKF 滤波器和 AEKF 滤波器, AIWEKF 算法较好地提高了组合系统的精度和鲁棒性。需要说明, 由于实验采用网上开源实测数据, 没有多场景进行试验, 因此实验中可能会出现个别不确定性的结果。

参考文献:

[1] 严恭敏, 翁浚. 捷联惯导算法与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2019.

[2] YANG C, SHI W Z, CHEN W. Correlational inference-based adaptive unscented Kalman filter with application in GNSS/IMU-integrated navigation[J/OL].GPS solutions, 2018[2025-04-21].<https://link.springer.com/article/10.1007/s10291-018-0766-2>.

[3] FRASER C T, ULRICH S. Adaptive extended kalman filtering strategies for spacecraft formation relative navigation[J]. Acta

astronautica,2021,178: 700-721.

[4] PACHTER M, CHANDLER P R. Universal linearization concept for extended Kalman filters[J]. IEEE transactions on aerospace and electronic systems, 1993, 29(3): 946-962.

[5] 张旭. 基于鲁棒自适应滤波的无人机编队相对导航方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.

[6] 李刚, 蔡成林, 李思敏, 等. 抗差与自适应组合的卡尔曼滤波算法在动态导航中的研究 [J]. 重庆邮电大学学报 (自然科学版), 2015,27(1): 37-43.

[7] PAN C, GAO J X, LI Z K, et al. Multiple fading factors-based strong tracking variational Bayesian adaptive Kalman filter[J]. Measurement 2021, 176:109139.

[8] SUN W X. Application of sage-husa adaptive filtering in trajectory prediction of moving obstacles[C]//2014 11th International Computer Conference on Wavelet Actiev Media Technology and Information Processing(ICCWAMTIP). Piscataway: IEEE, 2022:73-75.

[9] 夏启军, 孙优贤, 周春晖. 渐消卡尔曼滤波器的最佳自适应算法及其应用 [J]. 自动化学报, 1990(3):210-216.

[10] 杨元喜. 动态系统的抗差 Kaliman 滤波 [J]. 解放军测绘学院学报, 1997(2):79-84.

[11] CHEN D. Tukey's biweight estimation for uncertain regression model with imprecise observations[J]. Soft computing, 2020, 24(22): 16803-16809.

[12] WANG M S, WU W Q, HE X F, et al. State transformation extended kalman filter for SINS based integrated navigation system[C]//2019 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS). Piscataway: IEEE, 2019: 1-14.

【作者简介】

唐硕 (1999—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 硕士研究生, 大学教师, 研究方向: 组合导航。

易元森 (2001—), 男, 四川乐山人, 本科, 大学教师, 研究方向: 应用数学。

王涛 (2000—), 男, 四川乐山人, 本科, 大学教师, 研究方向: 机械设计制造及自动化。

黄天旭 (1984—), 通信作者 (email:422423782@qq.com), 男, 广西横州人, 本科, 高级实验师, 研究方向: 大数据训练。

(收稿日期: 2025-04-09 修回日期: 2025-09-16)