

基于四元数矩阵的彩色图像鲁棒主成分分析

岳亚辉¹ 王巍凤¹ 李慧勇¹ 于洪年² 廖亮¹

YUE Yahui WANG Weifeng LI Huiyong YU Hongnian LIAO Liang

摘要

为突破传统彩色图像恢复技术瓶颈,解决彩色图像在传输、存储或受噪声干扰等过程中出现的退化问题,文章提出了一种基于四元数的广义高阶标量恢复方法。首先,将传统四元数二阶矩阵模型扩展为更全面的“t-矩阵”高阶模型,并采用像素邻域扩展策略,实现对像素局部结构信息的精细化建模与表达。在此基础上,开发QRPCA和QTRPCA两种常规算法,将常规矩阵及四元数主成分分析算法推广至其高阶形式以适应新模型。通过公开图像数据集的实验验证表明,与传统的低阶张量模型和常规四元数鲁棒主成分分析模型相比,文章提出的四元数广义鲁棒主成分分析模型及其算法在恢复精度方面具有显著优势。

关键词

四元数;鲁棒主成分分析;像素邻域扩展策略;广义高阶矩阵模型;低秩恢复;凸优化

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2025.04.042

0 引言

主成分分析(PCA)^[1]是数据分析中的一种基础技术,利用高维数据中的低维结构来有效提取主要特征,从而优化计算效率。PCA的一个显著局限在于其对严重异常值或离群点的敏感性,而这些在实际应用中普遍存在。为解决这一问题,研究者们提出了多种鲁棒性的PCA版本。

鲁棒主成分分析(RPCA)^[2]旨在将给定的数据矩阵分解为低秩部分和稀疏部分,其中低秩部分表示数据的主要结构,稀疏部分则表示噪声或异常值。具体来说,给定观测矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,RPCA通过求解以下优化问题来恢复 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{E}$:

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{E}} \|\mathbf{L}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{E} \quad (1)$$

式中: $\|\mathbf{L}\|_*$ 表示矩阵 $\mathbf{L}$ 的核范数; $\|\mathbf{E}\|_1$ 表示矩阵 $\mathbf{E}$ 的 ℓ_1 范数; $\lambda > 0$ 表示权衡参数。

然而,RPCA只能处理二维(矩阵)数据,而实际数据通常是多维的,存储在称为张量的多维数组中。为解决这一局限,张量鲁棒主成分分析(TRPCA)被提出。将RPCA扩展到张量形式,以处理多维数据,TRPCA旨在从多维张量数据中分解出低秩和稀疏成分。

例如,Lu等人^[3]提出了基于张量核范数(TNN)的TRPCA模型,通过求解以下优化问题:

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \|\mathcal{L}\|_* + \lambda \|\mathcal{E}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E} \quad (2)$$

式中: $\|\mathcal{L}\|_*$ 表示张量 $\mathcal{L}$ 的张量核范数; $\|\mathcal{E}\|_1$ 表示张量 $\mathcal{E}$ 的 ℓ_1 范数。TRPCA模型允许使用 $n_3=3$ 的张量来表示彩色图像,从而能够同时处理R、G、B三个颜色通道,充分考虑其之间的相关性。

然而,传统的TRPCA模型在处理彩色图像时,可能未充分利用颜色通道之间的强相关性。近年来,四元数理论的应用显示了在彩色图像处理中建模通道间相关性的优势。

本文基于四元数理论,对传统的RPCA进行四元数扩展,提出了四元数鲁棒主成分分析(QRPCA)模型,实现彩色图像的整体处理。此外,进一步将其扩展到张量形式,提出了四元数张量鲁棒主成分分析(QTRPCA)模型,以期获得更优的处理效果^[4]。该模型融合了四元数和张量的优势,为彩色图像和多维数据的鲁棒主成分分析提供了新的思路。

1 四元数与彩色图像

1.1 四元数

四元数(Quaternion)的概念由W.R. Hamilton于1843年提出,是对复数的推广。四元数的集合记为 $\mathbb{H}$ 。

一个四元数 q 是由一个实部和三个虚部组成的超复数,形式为:

$$q = R(q) + I(q)i + J(q)j + K(q)k \quad (3)$$

式中: $R(q)$ 表示实部; $I(q)$ 、 $J(q)$ 、 $K(q)$ 表示虚部; i 、 j 、 k 表示满足以下乘法关系的虚数单位:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (4)$$

给定一个四元数矩阵:

1. 中原工学院信息与通信工程学院 河南郑州 450007

2. 爱丁堡龙比亚大学 英国爱丁堡 EH141DJ

[基金项目] 中原工学院科研团队发展项目(K2022TD001); 河南省杰出外籍科学家工作室(GZS2022012)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{i} + \mathbf{Q}_3\mathbf{j} + \mathbf{Q}_4\mathbf{k} \in \mathbb{H}^{m \times n} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。可以将 $\mathbf{Q}$ 表示为:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{j} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{i} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{B} = \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4\mathbf{i} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 。

为将四元数矩阵映射为复矩阵, 利用等价关系表示为:

$$\mathbf{Q} \mapsto \mathbf{Q}_{(C)} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: $\bar{\mathbf{A}}$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的共轭。

类似四元数矩阵也可以表示为实矩阵。对于任意给定的

$\mathbf{Q} \in \mathbb{H}^{m \times n}$, 可以表示为:

$$G: \mathbf{Q} \mapsto \mathbf{Q}_R \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \\ -\mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_1 & -\mathbf{Q}_4 & \mathbf{Q}_3 \\ -\mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 & \mathbf{Q}_1 & -\mathbf{Q}_2 \\ -\mathbf{Q}_4 & -\mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

通过对 $\mathbf{Q}_R$ 进行奇异值分解 (SVD) 来求得 $\mathbf{Q}$ 的 SVD。

这一方法利用实矩阵计算的高效性, 从而加速了四元数矩阵的分解过程。

1.2 彩色图像的四元数表示

将四元数模型用于彩色图像最早由 Pei 等人提出, 从而发展出一系列用于彩色图像处理的强大工具, 如傅里叶变换。在这种模型中, 彩色图像的每个像素的 R、G、B 值被映射为四元数 3 个虚部 i、j、k, 实部设为 0。因此, 尺寸为 $M \times N$ 的彩色图像可以表示为四元数矩阵:

$$f_q(m, n) = 0 + f_R(m, n)\mathbf{i} + f_G(m, n)\mathbf{j} + f_B(m, n)\mathbf{k} \quad (9)$$

式中: $f_R(m, n)$ 、 $f_G(m, n)$ 和 $f_B(m, n)$ 分别表示像素 $m \times n$ 处的 R、G、B 通道的灰度值。

通过将彩色图像表示为四元数矩阵, 能够在四元数域 $\mathbb{H}$ 上应用鲁棒主成分分析 (RPCA) 等算法来处理彩色图像数据。因此, 尺寸为 $M \times N$ 的彩色图像可视为 $\mathbb{H}^{m \times n}$ 中的一个元素, 即一个 $M \times N$ 的四元数矩阵。

这种表示方法的优势在于能够自然地捕获颜色通道之间的相关性, 提供比单独处理每个通道更丰富的结构信息。为后续的图像处理和分析算法奠定坚实基础。

2 T-矩阵

以数组作为元素是一种新颖的高阶数组表示方法, 使得数据结构信息更好地保留。广义矩阵 (T-matrix) 是由称为广义标量 (t-scalars) 的元素组成的矩形数组。

2.1 广义标量 (t-scalars)

在经典矩阵分析中, 矩阵的元素通常是实数或复数。然而, 通过将这些元素扩展为任意固定阶数和大小数组, 推广广义标量 (t-scalar) 的概念。高阶四元数数组是 t-scalar 的

典型例子。参照 LMaybank 的框架^[5], 对 t-scalar 进行了推广。t-scalar 的引入为构建新型矩阵提供了理论工具, 使许多经典矩阵算法能够推广到 t-矩阵算法领域。以下定义形式化了 t-scalar 的运算。

定义广义标量 (t-scalars), 令 m 和 n 为正整数, $\mathbb{H}$ 表示四元数集合。一个 t-scalar $\mathbf{x}$ 是一个固定尺寸的 $m \times n$ 四元数数组, 即 $\mathbf{x} \in C$, 其中 $C \doteq \mathbb{H}^{m \times n}$ 。在集合 C 上定义以下运算:

(1) 加法: 对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, 其和 $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in C$ 按元素相加定义为:

$$(\mathbf{z})_{i,j} = (\mathbf{x})_{i,j} + (\mathbf{y})_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \quad (10)$$

(2) 数乘: 对于任意 $\alpha \in \mathbb{H}$ 和 $\mathbf{x} \in C$, 定义为:

$$\mathbf{y} = \alpha \cdot \mathbf{x} \in C \quad (11)$$

式中: $(\mathbf{y})_{i,j} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 。

(3) 乘法: 对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, 定义其乘积 $\mathbf{z} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y} \in C$ 为二维循环卷积:

$$(\mathbf{z})_{p,q} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\mathbf{x})_{i,j} \cdot (\mathbf{y})_{i',j'} \quad (12)$$

式中: $i' = ((p-i) \bmod m) + 1$, $j' = ((q-j) \bmod n) + 1$, 且 $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$ 。

2.2 广义矩阵

广义矩阵 (T-matrices) 是广义标量 (t-scalars) 的矩形容器。由于 t-scalars 的数据结构是 $C \doteq \mathbb{H}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n}$ 中的数组, 所以将 $C^{D_1 \times D_2}$ 中广义矩阵表示成高阶数组形式为 $\mathbb{H}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times D_1 \times D_2}$ 。

广义矩阵的高阶数组的数据结构, 部分研究者将这些广义矩阵称为张量^[6]。对广义矩阵的运算类似于对传统矩阵的运算。具体来说, 有以下定义:

(1) 四元数广义矩阵的模式 k 展开^[7]: 对于任意一个 n 阶四元数广义矩阵, 其模式 k 展开被定义为:

$$\text{Unfold}_k(\hat{\mathbf{H}}) = \hat{\mathbf{H}}_{[k]} \in \mathbb{H}^{I_k \times I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{k-1} \times I_{k+1} \times \dots \times I_n \times D_1 \times D_2} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{[k]}(i_k, i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n d_1 d_2) = \hat{h}_{i_1, i_2, \dots, i_n, d_1, d_2}$$

式中: $i_1, i_2, \dots, i_n, d_1, d_2$ 是 $\hat{\mathbf{H}}$ 的第 $(i_1, i_2, \dots, i_n, d_1, d_2)$ 条目。

(2) 四元数广义矩阵的模式 k 乘法^[8]: 对于任意一个四元数广义矩阵 $\hat{\mathbf{H}} \in \mathbb{H}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times D_1 \times D_2}$ 和一个四元数矩阵 $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{M \times I_k}$, 其模式 k 乘法表示为:

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{H}} \times_K \hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{I_1 \times \dots \times I_{k-1} \times M \times I_{k+1} \times \dots \times I_n \times D_1 \times D_2} \quad (14)$$

则:

$$\mathbf{y}_{i_1 \dots i_{k-1} m i_{k+1} \dots i_n} = \sum_{i_k=1}^{I_k} \hat{h}_{mi_k} \cdot \hat{h}_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (15)$$

3 鲁棒主成分分析及其扩展

本章介绍了基于四元数矩阵的 RPCA 框架, 将传统的 SVD 扩展至 QSVD, 及其高阶 QTSVD, 并提出了一种高阶

QTRPCA 方法及其优化算法。

3.1 基于四元数矩阵的鲁棒主成分分析

给定一张尺寸为 $M \times N$ ，具有 R, G, B 三个通道的彩色图像 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N \times 3}$ ，可以将其表示为一个四元数矩阵：

$$\mathbf{X} = \mathbf{0} + \mathbf{X}_R \cdot \mathbf{i} + \mathbf{X}_G \cdot \mathbf{j} + \mathbf{X}_B \cdot \mathbf{k} \in \mathbb{H}^{M \times N} \quad (16)$$

式中： $\mathbf{X}_R, \mathbf{X}_G, \mathbf{X}_B \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 分别表示彩色图像的 R、G、B 三个通道的灰度矩阵。

彩色图像的恢复问题旨在从观测到的四元数矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{M \times N}$ 中恢复受损的低秩四元数矩阵 $\mathbf{L}$ ，满足：

$$\mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (17)$$

式中： $\mathbf{L}$ 是低秩四元数矩阵； $\mathbf{S}$ 是与噪声或异常值相关的稀疏四元数矩阵。

四元数的应用促进了基于彩色图像传统算法的扩展，包括广受认可的奇异值阈值（singular value thresholding, SVT）算法^[9]，在鲁棒主成分分析（robust principal component analysis, RPCA）问题中发挥着关键作用。使用四元数，可以有效地处理彩色图像，保留通道间的相关性，提升恢复算法的性能。算法 1 给出了在四元数矩阵的奇异值阈值法（quaternionic svt, QSVT）的伪代码。

算法 1 四元数矩阵的奇异值阈值法(QSVT)

输入： $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}^{M \times N}, \tau > 0$ 。

输出：四元数矩阵的 SVT 近似 $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{H}^{M \times N}$ 。

- 1: 依公式(1.6)计算实表示矩阵 $\mathbf{Q}_R \leftarrow G(\mathbf{Q})$
- 2: $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \mathbf{Q}_R$ ▷ 计算实矩阵 $\mathbf{Q}_R$ 的 SVD
- 3: $\hat{\mathbf{Q}}_R = \mathbf{U}(\mathbf{S} - \tau)\mathbf{V}^T$ ▷ 计算 $\mathbf{Q}_R$ 的 SVT
- 4: $\hat{\mathbf{Q}} \leftarrow G^{-1}(\hat{\mathbf{Q}}_R)$ ▷ 计算由实矩阵到四元数矩阵的逆变换

与传统 RPCA、TRPCA 等多通道方法相比，使用四元数核范数（QNN）惩罚是提高许多彩色图像恢复性能的有效方法之一，其原因之一是在四元数作用域下的 RPCA 以一种整体的方式合并了三个通道的相关信息。

3.2 基于广义四元数矩阵的鲁棒主成分分析

现有的基于四元数的方法大多局限于一维四元数向量或二维四元数矩阵。通过像素邻域策略对传统的 QRPCA 算法进行高阶扩展。具体而言，图 1 给出了“ 3×3 像素邻域”的扩展策略。

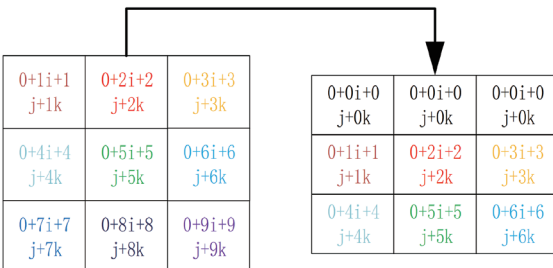


图 1 “ 3×3 像素邻域”的扩展策略

广义四元数矩阵的鲁棒主成分分析问题旨在从一个四元数广义矩阵中恢复出其低秩部分和稀疏部分。通常广义四元数矩阵的结构假设是低秩的或近似低秩的。在数学上，QTRPCA 问题的优化模型可表示为：

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} P_L(\mathbf{L}) + \lambda P_S(\mathbf{S}), \text{ s.t. } \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (18)$$

上述问题可以用交替方向乘法（alternating direction method of multipliers, ADMM）求解。计算广义四元数矩阵的核范数是一个关键。定义广义四元数矩阵的奇异值阈值算子为：

$$D_\tau(\dot{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{QSVT}(\dot{\mathbf{Y}}_{[k]}) \quad (19)$$

式中： $\dot{\mathbf{Y}}_{[k]}$ 为广义四元数矩阵 $\dot{\mathbf{Y}}$ 的模式 k 展开。本文采用邻域拓展策略将四元数矩阵进行扩展后得到的广义四元数矩阵为 $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^{3 \times 3 \times I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n}$ ，为保证像素邻域间的相互关系，将不对 3×3 所在的维度展开。

基于广义四元数矩阵的 QRPCA 流程如图 2 所示。

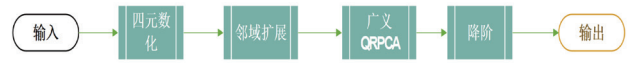


图 2 QRPCA 流程

四元数化：以四元数矩阵的形式重构彩色图像。

邻域扩展：其邻域扩展过程如图 2 所示。设矩阵的大小为 $D_1 \times D_2$ 。每个像素都有一个大小为 $I_1 \times I_1$ 的像素邻域。如果一个像素在图像的边界处，可以在必要地方填充“ $0+0i+0j+0k$ ”，以获得该像素的 $I_1 \times I_1$ 邻域。将每个像素替换为它的像素邻域，就有针对彩色图像的多路阵列表示，即 $C^{D_1 \times D_2} \equiv \mathbb{H}^{I_1 \times I_2 \times D_1 \times D_2}$ 的 t - 矩阵。

广义 QRPCA：在广义四元数矩阵上进行相应的 QRPCA 操作。有关的优化详细信息，如算法 2 所示。

算法 2 ADMM 求解(3.3)

Input: $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{H}^{3 \times 3 \times M \times N}, \lambda$ 。

初始化参数: $\hat{\mathbf{L}}_0 = \hat{\mathbf{S}}_0 = \hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{0}, \rho = 1.1, \mu_0 = 10^{-3}, \mu_{\max} = 10^{10}, \epsilon = 10^{-8}$ 。

- 1: while 未收敛 do
- 2: 更新 $\{(\hat{\mathbf{L}}_{[k]})_{k=3}^N\}_{t+1}$

$$\{(\hat{\mathbf{L}}_{[k]})_{k=3}^N\}_{t+1} = \arg \min_{\hat{\mathbf{L}}_{[k]}} \|\hat{\mathbf{L}}_{[k]}\|_* + \frac{\mu_k}{2} \left\| \hat{\mathbf{L}}_{[k]} + \hat{\mathbf{S}}_{[k],t+1} - \hat{\mathbf{X}}_{[k]} + \frac{\mathbf{Y}_{[k],t}}{\mu_k} \right\|_F^2$$

- 3: 更新 $\{(\hat{\mathbf{S}}_{[k]})_{k=3}^N\}_{t+1}$

$$\{(\hat{\mathbf{S}}_{[k]})_{k=3}^N\}_{t+1} = \arg \min_{\hat{\mathbf{S}}_{[k]}} \lambda \|\hat{\mathbf{S}}_{[k]}\|_1 + \frac{\mu_k}{2} \left\| \hat{\mathbf{L}}_{[k],t+1} + \hat{\mathbf{S}}_{[k]} - \hat{\mathbf{X}}_{[k]} + \frac{\mathbf{Y}_{[k],t}}{\mu_k} \right\|_F^2$$

- 4: $\hat{\mathbf{L}}_{t+1} = \frac{1}{N-2} \sum_{k=3}^N \hat{\mathbf{L}}_{[k]}$
- 5: $\hat{\mathbf{S}}_{t+1} = \frac{1}{N-2} \sum_{k=3}^N \hat{\mathbf{S}}_{[k]}$
- 6: $\hat{\mathbf{Y}}_{t+1} = \hat{\mathbf{Y}}_t + \mu_t (\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{L}}_{t+1} - \hat{\mathbf{S}}_{t+1})$
- 7: 更新 $\mu_{t+1} = \min(\rho \mu_t, \mu_{\max})$
- 8: 检查收敛条件

$$\|\hat{\mathbf{L}}_{t+1} - \hat{\mathbf{L}}_t\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|\hat{\mathbf{S}}_{t+1} - \hat{\mathbf{S}}_t\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|\hat{\mathbf{L}}_{t+1} + \hat{\mathbf{S}}_{t+1} - \hat{\mathbf{X}}\|_\infty \leq \epsilon$$

- 9: end while

Output: $\hat{\mathbf{L}}_{t+1}, \hat{\mathbf{S}}_{t+1}$

降阶：选取广义四元数矩阵中各像素的中心点。
输出：与输入同类型且大小相等的输出。

4 实验

在本节中，通过具体的实验展示 QTRPCA 与其他典型的竞争方法在彩色图像恢复任务中的恢复性能。

4.1 实验参数设置

数据集：使用（berkeley segmentation dataset, BSDS）作为数据库。

图片的大小为 321×481×3 或 481×321×3。在图 3 中展示了测试数据集中的一些样本。为测试该方法的恢复性能，在每个图像中加入随机噪声。具体来说，将每张图像中 10% 的像素随机设置为 [0, 255] 中的随机值。图 3 第二行显示了带有噪声的图像样本。

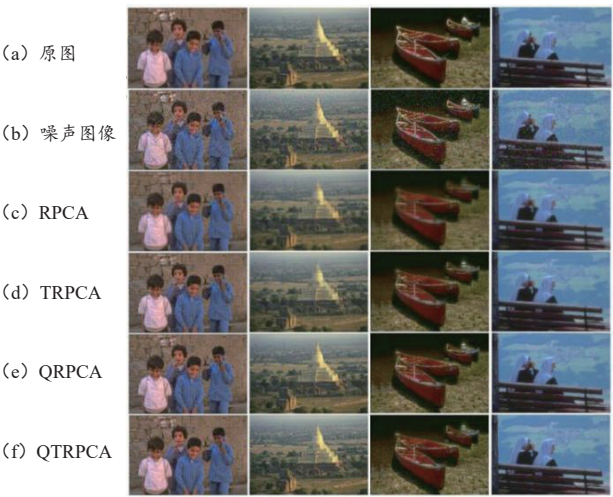


图 3 测试数据集样本

使用的竞争方法包括传统 RPCA，张量-TNN（TRPCA），基于四元数的 RPCA（QRPCA），以及广义四元数矩阵的 RPCA（QTRPCA）。

4.2 实验结果及分析

所有竞争方法的恢复结果如图 3 所示，各个恢复图像的 PSNR 值如表 1 所示。可以看出，QTRPCA 在大多数情况下表现更好。这表示基于广义四元数矩阵的 RPCA 方法可以直接应用于彩色图像恢复任务。

表 1 各恢复图像的 PSNR 值

图像	1	2	3	4
RPCA	26.992 0	27.86	20.716 8	29.796 0
TRPCA	29.804 0	29.964 4	23.510 5	32.840 8
QRPCA	29.741 1	30.213 1	23.840 0	33.650 3
QTRPCA	30.114 9	30.833 2	23.23 74	33.778 0

5 结论

从 BSDS 数据集随机选择彩色图像作为测试集对传统的 QRPCA 与广义四元数 RPCA 进行实验分析比较。实验数据表明，广义标量为二阶的四元数矩阵所获得图像的峰值信噪比要优于传统的广义标量为一阶的四元数矩阵所获得的结果。

参考文献：

[1] LEVER J, KRZYWINSKI M, ALTMAN N. Principal component analysis[J]. Nature,2017(6):641-642.

[2] CANDÈS E J, LI X D, MA Y, et al. Robust principal component analysis?[J]. Journal of the ACM (JACM), 2011, 58(3): 1-37.

[3] LU C Y, FENG J S, CHEN Y D, et al. Tensor robust principal component analysis with a new tensor nuclear norm[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2020, 42(4): 925-938.

[4] LIAO L, GUO Z, GAO Q, et al. Color image recovery using generalized matrix completion over higher-order finite dimensional algebra[J]. Axioms, 2023, 12(10): 954.

[5] LIAO L, MAYBANK S J. Generalized visual information analysis via tensorial algebra[J]. Journal of mathematical imaging and vision, 2020, 62: 560-584.

[6] CHANG S Y, WEI Y M. T-product tensors—part II: tail bounds for sums of random T-product tensors[J]. Computational and applied mathematics, 2022, 41(3): 99.

[7] MIAO J F, KOU K I, LIU W K. Low-rank quaternion tensor completion for recovering color videos and images[J]. Pattern recognition, 2020, 107: 107505.

[8] MIAO J F, KOU K I, CHENG D, et al. Quaternion higher-order singular value decomposition and its applications in color image processing[J]. Information fusion, 2023, 92: 139-153.

[9] CANDES E J, RECHT B. Exact matrix completion via convex optimization[J]. Foundations of computational mathematics, 2009, 9: 717-772.

【作者简介】

岳亚辉(1998—), 男, 河南洛阳人, 硕士研究生, 研究方向: 基于四元数矩阵的彩色图像鲁棒主成分分析算法研究。

(收稿日期: 2024-12-10)