

基于低频近似的光滑相位恢复算法研究

刘小雅¹

LIU Xiaoya

摘要

由于自然图像的大部分信息集中在低空间频段，而相位恢复算法中的损失函数通常为非凸且不光滑，尤其是绝对值项的不光滑特性会恶化 AF 算法的性能。为此，文章提出了一种基于低频系数近似的光滑共轭振幅流（FSCG）算法。该算法通过设计光滑的损失函数，避免了当 $a_i^H z$ 接近零时梯度突变的负面影响，并且不依赖于传统的截断和重加权过程，从而简化了实现过程并提高了性能。大量数值试验证明，FSCG 算法在一维情况下的收敛速度优于现有方法，并且在二维图像的振幅与相位重构中也表现出良好的效果。

关键词

信号恢复；相位恢复；光滑梯度；低频近似

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2025.04.036

0 引言

在信息技术的发展过程中，相位恢复（phase retrieval, PR）是信号处理中的一种重要技术，其本质是解决逆问题，通过从部分缺失、模糊或无法直接测量的数据中恢复完整的信号信息。在实际应用中，信号往往在采集、传输或存

储过程中受到噪声干扰、数据丢失或测量限制，这些问题使部分关键信息（尤其是相位信息）无法直接获取或测量。相位恢复技术通过一系列优化算法和数学建模，从可获得的强度或振幅数据中推断出丢失的相位信息，从而重建信号的完整形式。

PR 也广泛应用于压缩感知、信号去噪、数据插值等技术密切相关，为从不完整的数据中恢复出精确的信号信息提

1. 西安石油大学理学院 陕西西安 710065

参考文献：

- [1] 许水清, 陶松兵, 柴毅, 等. 基于瞬时幅值的光伏系统电流传感器微小故障检测及估计 [J]. 控制与决策, 2022, 37(3): 583-592.
- [2] 陈美霞, 梁师嵩, 胡佳乔. 基于向量自回归模型和小波分析法的列车充电机电流传感器故障检测方法 [J]. 城市轨道交通研究, 2022, 25(4): 152-155.
- [3] 赵万里, 郭迎清, 徐柯杰, 等. 基于多模型的航空发动机传感器混合故障诊断方法 [J]. 推进技术, 2023, 44(3): 229-237.
- [4] 李冬辉, 赵墨刊, 高龙. 基于 CNN-GRU 的冷水机组传感器偏差故障诊断方法 [J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 2022, 49(2): 74-82.
- [5] 熊伟, 苟斌, 张坤, 等. 基于数据驱动的牵引逆变器电压传感器间歇性故障诊断方法 [J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(11): 4446-4459.
- [6] 王凌燕, 焦冬秀. 基于椭圆计算的集员滤波传感器故障检测方法 [J]. 机械设计与制造, 2024(10): 12-19.

- [7] 郁明, 李旺林, 蓝盾. 基于优化自适应阈值的非线性机电系统传感器故障检测和主动容错控制 [J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(4): 26-37.
- [8] 杨贺雅, 邢纹硕, 陈聪, 等. 基于随机森林二分类器的模块化多电平换流器子模块开路故障检测方法 [J]. 中国电机工程学报, 2023, 43(10): 3916-3928.
- [9] 辛梓铭, 王芳. 基于改进朴素贝叶斯算法的文本分类研究 [J]. 燕山大学学报, 2023, 47(1): 82-88.
- [10] 庄小亮, 李乾坤, 刘紫罡, 等. 基于改进 MFCC-OCSVM 和贝叶斯优化 BiGRU 的 GIS 异常工况声纹识别算法 [J]. 南方电网技术, 2025, 19(1): 30-40.

【作者简介】

鲁雅聪（1997—），女，河南郑州人，硕士，助教，研究方向：光电器件。

赵文涵（1997—），女，河南郑州人，硕士，助教，研究方向：光子学与光电子技术。

(收稿日期：2025-02-11)

供了强有力的理论和算法支持。比如在无线通信中，PR 算法常被用于信道估计^[1]，特别是在多径传播环境下，通过从测量数据中恢复真实的信道状态，帮助实现高效的数据传输和信号恢复；在压缩感知与数据恢复中^[2]，通过将高维数据映射到低维空间进行有效压缩，并在数据重建时使用优化算法从有限的测量数据中恢复出完整的信息；在医学超声成像^[3]中，PR 算法有助于恢复组织内部的详细结构信息，提升图像分辨率，帮助医生更好地诊断疾病；在天文学^[4]中，PR 技术可以帮助天文学家从地面望远镜观测的数据中恢复星系、恒星和其他天体的详细信息，提升遥远天体的观测精度，推动天文研究向更深远的宇宙探索发展。

在数学上，PR 是求解如下形式的方程组：

$$y_i = \langle a_i, x \rangle, i=1, 2, \dots, m \quad (1)$$

式中： $y=[y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ 为测量向量； x 为待恢复的信号； a_i 为已知感知向量。

回溯过往，关于相位恢复（PR）问题研究取得了显著进展。求解 PR 问题的经典方法主要包括基于交替投影的（gerchberg-saxton, GS）算法^[5]和混合输入-输出（HIO）算法^[6]。尽管这些方法得到广泛应用，但其存在高复杂度问题。针对该问题，Candes 等人^[7]提出了 Wirtinger 流（WF）算法并基于此，衍生出了两个变体：截断 WF（TWF）算法^[8]和重加权 WF（RWF）算法^[9]。然而，通过最小化以下基于振幅的模型被发现可以获得更好的性能：

$$\min_z f(z) := \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left(|a_i^H z| - y_i \right)^2 \quad (2)$$

这种方法被总结为幅度流（AF）算法^[10]。为进一步提高 AF 的性能，Wang 等人^[11]提出了截断 AF（TAF）算法^[12]和重加权 AF（RAF）算法，在梯度研究中分别采用截断和重加权操作。

从统计学角度来看，自然图像的大部分信息主要集中在低空间频段，其中低频部分通常对应图像的边缘以内区域。对于一幅图像而言，边缘内的内容包含了图像的大致概貌和轮廓，构成了图像的近似信息。图 1 是一个对于一维信号和二维信号的低频系数分布图。

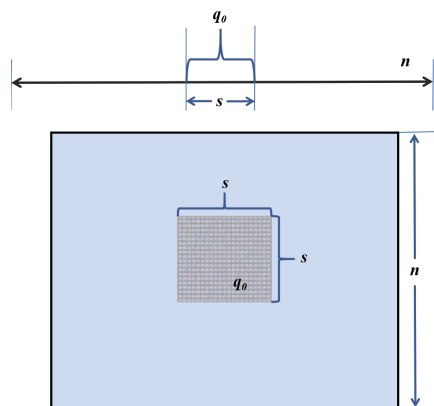


图 1 一维信号和二维信号的低频系数分布

因此，本文在第一阶段通过近似求解 x 的低频系数 q ，其中， q 的大小为 $k \times 1$ 。由于低频信息可以通过少量的低频系数来有效表示，且 k 远小于 n ，这意味着未知数的数量大幅减少，从而使得 FSCG 算法能够显著降低样本的复杂度。这种减少未知数的思想同样被应用于稀疏相位恢复中。

从理论上分析，为了分离迭代过程中过大或过小的梯度分量，TWF、TAF 算法采用截断法去除影响过大的分量。而 RWF 和 RAF 算法则通过在每次更新时降低这些成分的权重来控制这些成分。然而，这些方法往往会导致搜索方向不一致，并增加计算复杂度。因此，Luo 等人^[13]提出了平滑振幅流（SAF）算法，并引入了两个平滑函数来解决相位恢复模型的非平滑性问题。此外，Gao 等人^[14]还提出了扰动振幅流（PAF）算法，该算法引入了一个参数来降低不良观测值的影响。同时保持平滑损失函数，起到类似截断/再加权的作用。

在本文中，式（2）是一个非凸非光滑函数，非光滑绝对值项可能会恶化 AF 的数值性能。在优化过程，损失函数中的绝对值项 $|a_i^H z|$ 在 $x=0$ 处是不可微的，也就是说，当 $a_i^H z$ 的值接近 0 时，梯度会发生突变，导致搜索方向不一致而增加计算复杂度。当被一个不理想的平稳点 z 卡住时， $a_i^H z$ 和 $a_i^H x$ 之间须有符号差异，即 $a_i^H z \neq a_i^H x$ 。此外，通过利用自然图像的大部分信息都集中在低空间频段这一特性，使用几个低频系数来表示近似表示全部信息，大大降低样本的复杂度。

1 所提算法

1.1 低频系数近似

在 FSAF 方法的第一阶段中， x_0 通过幂迭代方法被低频系数 q_0 近似表示为：

$$x_0 = f_1 q_1 + f_2 q_2 + \dots + f_s q_s = F_l q_0 \quad (3)$$

式中： F_l 为一个由低频傅里叶基构成的子空间矩阵，矩阵大小为 $n \times s$ ，包含低频基 $\{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ ，代表低频子空间； s 为低频基的数量，表示从完整的傅里叶基中选择的低频分量的个数。在实际应用中，可以通过快速傅里叶变换计算 $F_l q_0$ ，为了限制计算在低频范围内，会在 q_0 的高频部分用零填充。

在 FSCG 的幂迭代方法中，截断强度 $y_l = y \odot \Phi(y \leq c^2 \bar{y})$ 被用来近似 q_0 。 Φ 是一个逻辑矩阵，保留符合条件的元素，其余置零。

$$\Phi = \begin{cases} 1, & y \leq c^2 \bar{y} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

式中： $\odot$ 表示 Hadamard 乘积，即逐元素相乘； $\bar{y}$ 表示 y 的平均值； c 表示一个常数参数。FSAF 方法的实现过程通过幂迭代方法计算 $(AF_l)^H \text{diag}(y_l) AF_l$ 的主特征向量。

首先，将迭代计数 t 初始化为 1，并随机生成一个频率系数向量 q_0 ，然后对其进行归一化处理，即 $q_0 = q_0 / \|q_0\|$ 。接着，计算更新向量 q_0 ：

$$\mathbf{q}_0' = (\mathbf{A}\mathbf{F}_i)^H (\mathbf{y}_i \odot \mathbf{A}\mathbf{F}_i \mathbf{q}_0) \quad (5)$$

式中： $\mathbf{F}_i$ 或 $\mathbf{F}_i^H$ 可以分别用傅里叶变换（FFT）或快速傅里叶逆变换（IFFT）来计算。然后，利用 $\mathbf{q}_0' = \mathbf{q}_0 / \|\mathbf{q}_0'\|$ 来更新当前频率系数。该迭代的终止条件设置为 $t=200$ 。并得到最终初始化值：

$$\mathbf{z}_0 = \sqrt{\Phi} \mathbf{F}_i \mathbf{q}_0 \quad (6)$$

1.2 光滑的共轭迭代

利用光滑共轭的梯度下降算法，以 $\mathbf{z}_0$ 作为初始化迭代，寻找全局最优。由维尔丁格导数得出对 $\mathbf{z}$ 的梯度 $\nabla l_\theta(\mathbf{z}_i)$ 为：

$$\nabla l_\theta^o(\mathbf{z}_i) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{\sqrt{y_i^2 + \theta_i^2}}{\sqrt{|\mathbf{a}_i^H \mathbf{z}_i|^2 + \theta_i^2}} \right) (\mathbf{a}_i^H \mathbf{z}_i) \mathbf{a}_i \quad (7)$$

通过一系列的梯度迭代进行估计：

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{z}_t - \mu_t \nabla l_\theta^o \quad (8)$$

式中： t 为迭代次数； μ_t 为步长。本文使用（polak-ribière-polyak, PRP）方法来确定 $\mathbf{z}_{t+1}$ 搜索方向，则 $\mathbf{d}_t$ 为：

$$\mathbf{d}_t = \nabla l_\theta^o - \frac{\text{Re}((\nabla l_\theta^o)^H \cdot (\nabla l_\theta^o - \nabla l_{t-1}^o))}{\|\nabla l_{t-1}^o\|^2} \mathbf{d}_{t-1} \quad (9)$$

式中：如果 $t=0$ ，则 $\mathbf{d}_0 = \nabla l_\theta^o$ 。并且更新方向 $\mathbf{d}_t$ 是由当前的梯度 ∇l_θ^o 和之前的方向 $\mathbf{d}_{t-1}$ 结合得到的。

对于步长 μ_t 来说，本文采用了自适应的步长计算方式，这样对于每次迭代步长 μ_t 的选择是一个最优的过程，而不是依赖经验值。具体的步长 μ_t 公式为：

$$a_q \mu_t^3 + b_q \mu_t^2 + c_q \mu_t + d_q = 0 \quad (10)$$

式中： $a_q = \sum_{i=1}^m |h_i|^4$ ， $b_q = -3 \sum_{i=1}^m \beta_i |h_i|^4$ ，且 $h_i = \mathbf{a}_i^H \mathbf{d}_t$ ， $c_q = \sum_{i=1}^m r_i |h_i|^2 + 2\beta_i^2$ ，

$d_q = -\sum_{i=1}^m \beta_i r_i$ ，其中 $\mu_i = \text{Re}((\mathbf{a}_i^H \mathbf{z}_t)^* h_i)$ ，且误差为 $r_i = |\mathbf{a}_i^H \mathbf{z}_t|^2 - y_i$ 。

因此通过式（10）的闭式解可以直接计算步长 μ_t ，减少数值求解的复杂度。

2 实验部分

本节展示了一系列数值实验，用以验证理论分析的有效性。此外，将 SPAF 方法与其他先进的梯度下降方法进行比较，包括 PAF、SAF 和 TAF 算法。所有实验均在一台运行 Windows 10（64 位）的计算机上进行，硬件配置为 Intel Core i5-8250U CPU 和 8 GB RAM，实验平台为 MATLAB 2016a。在确保公平比较的前提下，各方法的算法参数均设置为推荐值。每种方法的初始化通过 100 次幂迭代实现，随后进行 $T=1\,000$ 次梯度迭代进行精细优化。

2.1 收敛性

为验证算法的收敛性，绘制了在无噪声条件下，不同迭代次数对应的复值信号的相对误差曲线。其中，纵坐标表示相对误差的对数值（ $\log_{10}$ ），横坐标表示迭代次数。实验中，信号长度设定为 $n=1\,000$ ，采样率为 $m/n=3$ ，并进行了 1 000 次独立试验。将所提出的算法与其他方法进行了比较，结果如图 2 所示。

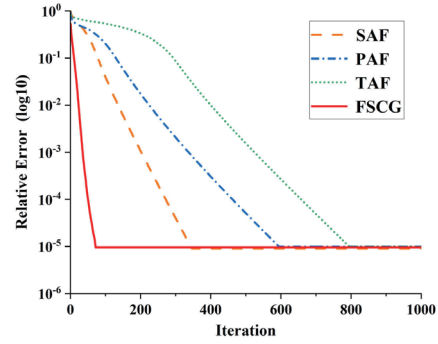


图 2 复值情况下不同算法收敛速度的比较

从图中可以观察到，FSCG 算法在所有方法中表现出最优的性能。在初期迭代阶段，FSCG 算法能够快速降低相对误差，显著优于其他方法，并且在随后的迭代过程中始终保持较低的误差水平。最终误差最小，且收敛过程稳定高效，明显优于其他算法。相比之下，SAF 和 PAF 方法虽然在初期迭代中表现出一定的误差下降趋势，但在后期收敛速度较慢，误差水平始终偏高。TAF 方法尽管在整个迭代过程中展现出更为平滑的改进趋势，但其最终误差仍然较大，难以达到高精度的要求。

综上所述，FSCG 算法不仅在收敛速度上展现出显著优势，而且能够达到更低的误差水平。其优异的性能证明了算法在复值信号处理中的可靠性和实用性。

2.2 真实值和恢复值

为了验证算法的恢复性能，图 3 展示了在无噪声条件下，不同迭代次数下复值信号的振幅和相位的实验结果。这两幅图中均包含两组数据：真实值（GT）和恢复值（Rec）。其中，星形表示真实值，代表原始信号的振幅或相位数据；线条则表示恢复值，旨在尽可能接近真实数据，以评估算法的恢复精度。

从实验结果可以看出，恢复数据与真实数据之间的差异极小。恢复值（Rec）紧密跟随真实值（GT）的变化趋势，展现了该算法在振幅和相位恢复上的高精度表现。图中的恢复曲线与真实数据在整体波动趋势上高度一致，进一步表明算法在保留信号特征方面的可靠性。无论是振幅数据还是相位数据，恢复算法均表现出优异的性能，能够在较少的迭代步骤内实现精确的重建。

综合来看，该恢复方法不仅在无噪声条件下展现了极高的准确性，而且具备快速收敛的特点，适用于对数据恢复精度要求较高的应用场景。

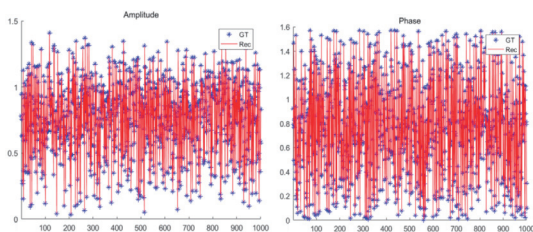


图3 基于无噪声条件下复值信号的振幅与相位恢复

2.3 二维图像的振幅与相位恢复

为验证所提出算法在二维图像恢复中的性能,选取两张图像进行了测试,并展示了其对应的振幅和相位恢复效果。如图4所示,第一行分别为原始的“城堡图”和“狒狒图”。从“城堡图”对应的振幅图中可以明显看出,图像的颜色信息被压缩或转换为强度信息,算法能够成功地恢复出该图像的振幅特征,保留其亮度分布。而相位图则展现了与振幅图不同的特性,主要保留了图像的几何结构和细节信息,尤其在边缘和轮廓的表现上尤为突出。

对于“狒狒图”的相位图,可以观察到,尽管缺乏原始图像的颜色和亮度信息,其结构和边缘轮廓依然清晰可辨,特别是在狒狒的眼睛、嘴巴和脸部轮廓等细节处展现了良好的恢复效果。这进一步验证了相位信息在描述图像结构方面的重要作用。

通过对这两张图像的测试结果分析,可以明确地得出结论:该算法在二维图像上的恢复性能优异,能够有效地分离并重建振幅和相位信息,展现出较强的适用性和可靠性。

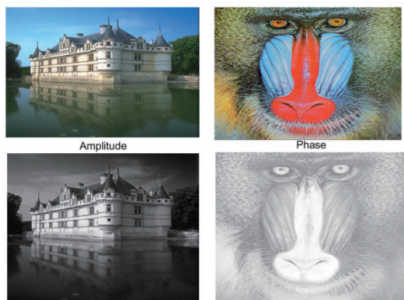


图4 图像的振幅与相位重构

3 总结

本文提出了一种基于低频系数近似的光滑共轭振幅流(FSCG)算法。该算法通过设计一种光滑的损失函数,避免了传统方法中梯度突变的问题,从而提升了算法的数值稳定性和计算性能。与现有方法相比,FSCG算法不再依赖于传统的截断和重加权过程,这使得该算法在实现上更加简便,同时避免了这些操作可能带来的计算复杂度和精度损失。大量的数值实验表明,FSCG算法在一维和二维数据中都具有良好的特性。综合来看,本文所提出的FSCG算法为相干衍射成像中的相位恢复问题提供了一个高效且易于实现的解决方案,具有较好的实际应用潜力。

参考文献:

- [1] 陈蕾.毫米波大规模MIMO稀疏信道估计研究[D].南京:东南大学,2020.
- [2] 俸闻婧.基于压缩感知的单帧复合图像绝对相位恢复方法[J].现代计算机,2024,30(13):45-50.
- [3] HARM W, ROIDER C, JESACHER A, et al. Lensless imaging through thin diffusive media [J]. Optics express, 2014, 22(18): 22146–22156.
- [4] FIENUP J B, DAINITY J C. Phase retrieval and image reconstruction for astronomy [J]. Image recovery: theory and application,1987, 231: 275.
- [5] GERCHBERG R W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. Optik, 1972, 35(2): 237-246.
- [6] FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. Applied optics, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [7] CANDES E J, LI X D, SOLTANOLKOTABI M, et al. Phase retrieval via wirtinger flow: theory and algorithms [J]. IEEE transactions on information theory, 2015, 61(4): 1985-2007.
- [8] CHEN Y X, CANDES E J. Solving random quadratic systems of equations is nearly as easy as solving linear systems[J]. Communications on pure and applied mathematics, 2017, 70(5): 822-883.
- [9] YUAN Z Y, WANG H X. Phase retrieval via reweighted Wirtinger flow [J]. Applied optics,2017,56(9): 2418-2427.
- [10] ZHANG H S, CHI Y J, LIANG Y B, et al. A nonconvex approach for phase retrieval: reshaped wirtinger flow and incremental algorithms [J]. Journal of machine learning research, 2017, 18(1): 5164–5198.
- [11] WANG G, GIANNAKIS G B, ELDAR Y C. Solving systems of random quadratic equations via truncated amplitude flow[J]. IEEE transactions on information theory, 2017, 64(2): 773-794.
- [12] WANG G, ZHANG L, GIANNAKIS G B, et al. Sparse phase retrieval via iteratively reweighted amplitude flow [C]//2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). Piscataway:IEEE, 2018: 712-716.
- [13] LUO Q, WANG H X, LIN S J. Phase retrieval via smoothed amplitude flow[J]. Signal processing, 2020, 177: 107719.
- [14] GAO B, SUN X W, WANG Y, et al. Perturbed amplitude flow for phase retrieval [J]. IEEE transactions on signal processing, 2020, 68: 5427-5440.

【作者简介】

刘小雅(2000—),女,陕西延安人,硕士研究生,研究方向:信号、图像处理。

(收稿日期:2024-12-18)