

基于改进反正切函数的变步长 LMS 算法研究

李典航¹ 王申营¹ 程 骏¹ 彭云锋¹ 邹腾跃¹

LIDianhang WANG Shenying CHENG Jun PENG Yunfeng ZOU Tengyue

摘 要

固定步长的自适应滤波降噪算法 (LMS) 的步长选择直接影响滤波性能。为此, 文章提出了一种基于反正切函数的变步长 LMS 算法。该算法通过引入指数函数并对反正切函数进行平移变换, 使得步长在误差趋于零时自适应减小, 从而降低稳态误差。在 MATLAB 仿真环境下, 分析了不同变步长 LMS 算法的步长变化曲线及均方误差 (MSE)。仿真结果表明, 相较于传统的 Sigmoid 变步长、算舌线变步长及反正切的变步长方法, 所提出的改进反正切变步长 LMS 算法具备更快的收敛速度和更高的滤波精度。

关键词

自适应滤波; 变步长 LMS 算法; 指数函数; 反正切函数; 收敛速度; 均方误差

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2025.04.027

0 引言

自适应滤波算法作为信号处理中的一种重要工具, 广泛应用于噪声抑制、回声消除、系统辨识等领域。经典的最小均方误差 (LMS) 算法因其简单、易于实现的特点, 被广泛采用。然而, LMS 算法的性能往往受到步长参数选择的影响。步长过大会导致收敛速度过快, 系统不稳定; 而步长过小则

会导致收敛速度过慢, 影响实时性能。因此, 如何选择合适的步长成为影响 LMS 算法性能的关键因素之一。

为应对这一问题, 近年来提出了多种变步长 LMS (最小均方) 算法。与此同时, 为避免步长选择不当导致滤波系统性能下降, 诸多学者提出了基于变步长的 LMS 算法^[1]。该算法通过建立步长因子与误差信号之间的非线性函数关系, 使得滤波系统能够同时实现较快的收敛速度、较高的跟踪精度, 并且保持较小的稳态误差。肖玮等人^[2]提出了一种基于 Sigmoid 函数的变步长 LMS 算法, 旨在解决特定问题。然而,

1. 福建农林大学机电工程学院 福建福州 350100

参考文献:

- [1] 王建国, 孙付仲, 苑子龙, 等. 基于改进 Faster RCNN 的瓷砖表面缺陷检测算法 [J]. 南京工业大学学报 (自然科学版), 2025, 47(1):49-55.
- [2] 刘旭, 陈里里, 范国栋, 等. 基于改进 Cascade R-CNN 算法的道路表面缺陷检测 [J]. 自动化与仪器仪表, 2023(10): 10-14.
- [3] 朱立志, 韦慧. 基于 YOLOv5s 融合注意力机制的轻量化行人检测算法 [J]. 佳木斯大学学报 (自然科学版), 2024, 42(8): 12-16.
- [4] WANG X Q, GAO H B, JIA Z M, et al. BL-YOLOv8: an improved road defect detection model based on YOLOv8[J]. Sensors, 2023, 23(20): 8361.
- [5] ZHANG X Y, ZHOU X Y, LIN M X, et al. ShuffleNet: an extremely efficient convolutional neural network for mobile devices[C]//2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Piscataway:IEEE,2018:6848-6856.

- [6] 沈鑫, 王钢, 赵毅涛, 等. 融合 SENet 注意力机制和 GA-CNN 的非侵入式负荷识别方法 [J/OL]. 中国电力 :1-10[2024-05-19].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.3265.TM.20240603.0944.004.html>.
- [7] 彭飞鸿, 刘万平, 黄东. 基于 CBAM-GLU-ISF 的多模态融合恶意软件检测方法 [J/OL]. 计算机工程与应用 :1-11[2024-11-11].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2127.tp.20241111.0949.017.html>.
- [8] 李胜杰, 刘贵如, 王陆林, 等. 一种轻量化 YOLOv5 道路缺陷检测算法 [J/OL]. 天津理工大学学报 :1-10[2024-09-11]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/12.1374.N.20241101.1754.006.html>.

【作者简介】

杨根 (1997—), 男, 安徽合肥人, 硕士, 研究方向: 计算机视觉。

(收稿日期: 2024-12-04)

Sigmoid 函数需要进行指数运算, 计算量较大, 导致其在实际应用中存在一定的效率瓶颈。随后, 郭辰锋等人^[3]提出了一种基于箕舌线的变步长 LMS 算法, 通过有效降低计算复杂度, 解决了前述问题。接着, 韩啸等人^[4]提出了一种基于反正切函数的变步长 LMS 算法。与 Sigmoid 函数和箕舌线方法相比, 反正切函数在收敛速度和稳态误差上表现更优, 但仍然存在进一步优化的空间。

针对上述问题, 本文对基于反正切函数的变步长 LMS 算法进行了有效改进, 提出了一种新的变步长 LMS 算法。通过引入指数函数并对反正切函数进行平移变换, 优化步长的自适应调整机制, 从而有效降低稳态误差, 并提高了滤波器的整体性能。

1 自适应滤波算法 LMS 理论

经典 LMS 算法采用固定步长的方式, 具有简单、计算效率高、稳定性较好, 其典型结构如图 1 所示。

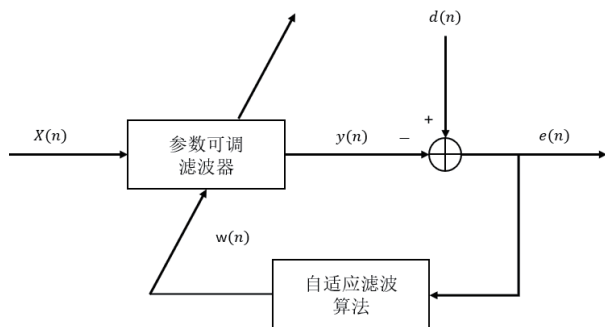


图 1 LMS 典型结构图

$X(n)$ 为输入信号, $X(n)=[x(n), x(n-1), \dots, x(n-L)]^T$; $y(n)$ 为 $X(n)$ 经过滤波器的结果; $w(n)$ 为 n 次迭代后的权重系数, $w(n)=[w_0(n), w_1(n), \dots, w_L(n)]^T$ 。

$$y(n) = w(n)^T x(n) \quad (1)$$

$e(n)$ 为误差信号, 是目标信号是 $d(n)$ 与 $y(n)$ 之差。

$$e(n) = d(n) - w(n)^T x(n) \quad (2)$$

将误差信号 $e(n)$ 的均方值最小作为最优的统计准则, 定义代价函数 $J(n)$ 。

$$J(n) = E[e^2(n)] \quad (3)$$

根据代价函数 $J(n)$ 的梯度方向调整滤波器权重, 以寻找最小化代价函数的最优权重系数。通过沿着负梯度方向进行调整, 滤波器能够逐步接近最优状态。

$$\nabla J(n) = \frac{\partial J(n)}{\partial w(n)} = -2e(n)x(n) \quad (4)$$

因此梯度下降算法的权重更新规则:

$$w(n+1) = w(n) + 2ue(n)x(n) \quad (5)$$

式中: u 为步长, 固定步长 LMS 自适应滤波算法步长为固定值。为保证算法的稳定性和收敛性 u 取值范围 $[0, 1/\lambda]$; λ 是 $x(n)$ 自相关矩阵的最大特征值。步长的选择是经典 LMS 算法中的一个关键问题。如果步长选择过大, 可能导致算法不稳定或者无法收敛; 而步长选择过小, 则会导致算法收敛速度慢, 需要更多的迭代次数才能达到期望的性能。常见的做法是通过试验和经验来选择合适的步长值。

2 变步长 LMS 算法

2.1 基于 Sigmoid 的变步长 LMS 算法

为同时满足收敛速度和收敛精度的问题, 在变步长 LMS 算法中常采用 Sigmoid 函数构建 $\mu(n)$ 与 $e(n)$ 之间的非线性关系。这种方法使学习率能够根据实时的误差信号动态调整, 从而在算法迭代过程中平衡了收敛速度和收敛精度的要求。当误差信号较大时, 学习率相应增大, 有利于加速收敛过程以尽快达到期望的输出结果; 而当误差信号较小时, 学习率减小, 有助于稳定收敛并防止过拟合现象的发生。这种自适应调整学习率的机制使得算法能够更加灵活地适应不同信号和噪声环境, 提高了算法的稳定性和收敛性。

文献[5]根据 Sigmoid 函数和变步长的思想, 提出一种经典的 SVSLMS 算法, 记为算法 SVSLMS-1。其 $\mu(n)$ 与 $e(n)$ 之间的非线性关系, 用公式表示为:

$$\mu(n) = \beta \left[\frac{1}{1 + \exp(-\alpha|e(n)|)} - 0.5 \right] \quad (6)$$

式中: α 为控制函数形状的常数; β 为控制函数取值范围的常数。但是其在零点处的步长变化较大。针对此问题, 文献[6]提出一种新的 SVSLMS 算法, 记为算法 SVSLMS-2。

$$\mu(n) = \beta \left[\frac{1}{4} - \frac{\exp(-\alpha|e(n)|)}{1 + \exp(-\alpha|e(n)|)^2} \right] \quad (7)$$

文献[7]提出了一种新的解决方案。将式(1)作为调节因子提出一种新的变步长函数, 记为算法 SVSLMS-3。

$$\mu(n) = \beta \left[\frac{1}{1 + \exp(-c|e(n)|)} - 0.5 \right] \times \dots \left[1 + \frac{1}{1 + \exp(-\alpha(|e(n)| - 1.5))} \right] \quad (8)$$

上述三种算法都利用 Sigmoid 函数建立 $\mu(n)$ 与 $e(n)$ 的关系, 为了更直观地对上述三种算法进行性能对比, 可以通过绘制步长与误差的关系图来展示不同步长下滤波器误差的变化。可以更清晰地体现各算法在收敛速度和稳定性方面的性能差异。SVSLMS 的步长与误差的关系如图 2 所示。由图 2 可以看出三种算法都可以快速收敛。SVSLMS-2 虽然相比 SVSLMS-1 在零点处的步长变化更缓慢、稳定性更好, 但是拥有更小的步长变化, 收敛速度慢。SVSLMS-3

算法的提出相比于 SVSLMS-1 有着更快的收敛速度,但稳定性较差。SVSLMS-1 算法在收敛速度和稳定性之间达到了一种平衡状态,步长变化和稳定性相对于 SVSLMS-2 和 SVSLMS-3 而言都处于中等水平。

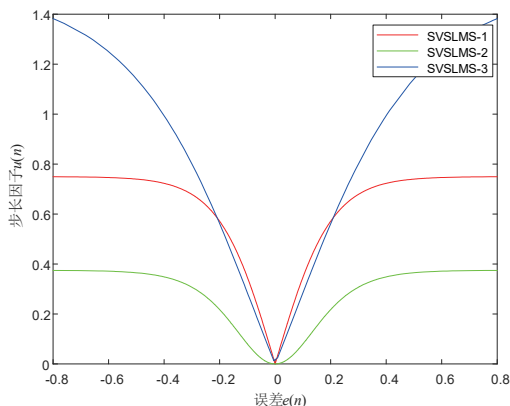


图2 步长与误差函数曲线

2.2 基于箕舌线的变步长 LMS 算法

由于 Sigmoid 函数需要指数计算,导致 SVSLMS 算法的计算量较大。针对此问题,文献[8]提出基于箕舌线的变步长 LMS 算法(TCLMS),利用平方项代替指数函数,算法记为 TCLMS-1,用公式表示为:

$$\mu(n) = a \left[1 - \frac{1}{be(n)^2 + 1} \right] \quad (9)$$

式中: a 为幅值系数; b 为箕舌线形状控制系数。上述算法可能受到输入信号中的噪声干扰的影响。文献[9]提出一种改进的方法是引入 $e(n)$ 和 $e(n-1)$ 的自相关估计,以此在存在不相关噪声时更有效地调整步长。经过测试发现算法未完全收敛时,步长因子会过早减小,导致收敛速度变慢。针对此问题,文献[10]引入补偿项。记为 TCLMS-2,最后形成的步长更新公式为:

$$\mu(n) = a \left[1 - \frac{1}{b|e(n)e(n-1)| + 1 + 0.1|e(n)|} \right] \quad (10)$$

上述算法虽然提高了抗噪性能,但是增大了失调量。文献[11]针对此问题提出一种改进算法记为 TCLMS-3。

$$\mu(n) = 2a \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{bE(e(n)e(n-1))}} \right] + \gamma \quad (11)$$

三种 TCLMS 的算法步长与误差的关系如图3所示。由图3可以看出 TCLMS 相比于 SVSLMS 减少了计算量,仍然可以快速完成收敛。TCLMS-1 相比于 TCLMS-3 有更大的步长、更快的收敛速度, TCLMS-1 和 TCLMS-2 的收敛速度相差不大。但是相比于二者, TCLMS-1 在零点处的步长变化更缓慢,稳定性更强。

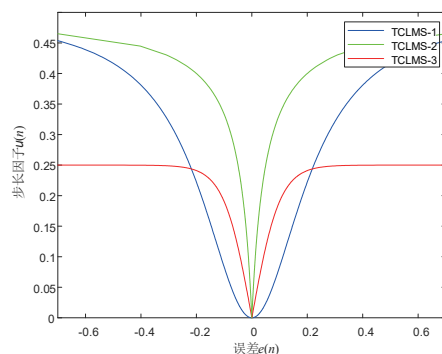


图3 步长与误差函数曲线

2.3 基于反正切的变步长 LMS 算法

选择反正切函数作为步长与误差的关系式(AVSLMS),可以有效地减少计算量。反正切函数的曲线形状与 Sigmoid 函数相似,这种相似性有助于在 LMS 算法中更好地控制步长,即在模型参数更新时更精确地调整学习率,从而提高算法的收敛性和稳定性。

文献[11]同样为解决反正切的变步长 LMS 算法的抗干扰性弱的问题,引入 $e(n)$ 和 $e(n-1)$ 的自相关估计,记为 AVSLMS-1。

$$\mu(n) = \beta \times \arctan^r(a|e(n)e(n-1)|) \quad (12)$$

文献[12]提出的基于反正切的变步长 LMS 算法的步长公式为,记为 AVSLMS-2。

$$\mu(n) = \beta \times \arctan(a|e(n)|^r) \quad (13)$$

文献[13]则在反正切的基础上添加了具有控制步长大小的反馈关系式,记为 AVSLMS-3。

$$\mu(n) = \beta \times \arctan(a(n) \times |e(n)|^r) \quad (14)$$

$$a(n) = f\left(\frac{e(n)}{e(n-1)}\right)^2 \quad (15)$$

将 $a(n)$ 当作是跟当前误差值与前一次误差值的比值的平方成正比的一个变量。

三种 AVSLMS 的步长与误差的关系图如图4所示。

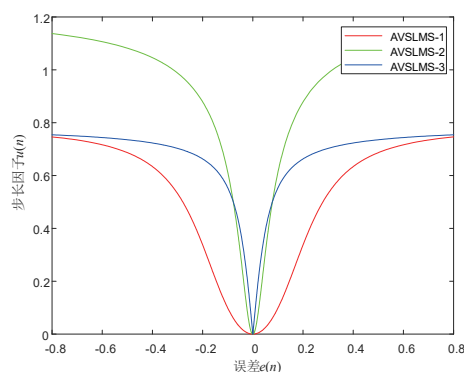


图4 步长与误差函数曲线

由图4可以看出, AVSLMS 也是变步长 LMS 的一种解决方案。AVSLMS-1 有着更快地收敛速度, AVSLMS-2 在零

点处的下降更缓慢,收敛后的稳定性更好。AVSLMS-3 则设计的参数更少。三种算法都有较大改进空间,但不能同时兼顾稳定性和收敛速度。

2.4 改进的反正切变步长 LMS 算法

针对上述变步长 LMS 算法的缺点,利用反正切函数结合文献 [14] 的思想提出一种改进算法。对反正切函数进行平移变换,使得误差趋于零时步长更小,以降低稳定误差,记为 AVSLMS-d,分别用公式表示为:

$$\mu(n) = \beta (\arctan(a|e(n)|^r - d(n)) + \dots + \arctan(d(n))) \quad (16)$$

$$d(n) = \delta \exp(|e(n)|) \quad (17)$$

AVSLMS-d 算法通过引入变量 $d(n)$, 采用指数函数计算,以更好地调控步长变化。相较于传统反正切算法,AVSLMS-d 在优化上有所突破。其主要改进包括结合两个反正切函数,用于调节步长。这一调整使得算法在误差接近零时,步长缩小,从而降低了稳定误差。该算法具有更强的误差响应性,更低的稳定误差,并且能够更灵活地调节参数。探究参数 β 、 α 、 r 、 δ 对步长与误差关系曲线的影响,通过控制变量法分别对 4 个参数进行测试,如图 5~图 8 所示。 β 主要控制步长的大小、 α 控制曲率、 r 和 δ 控制在零点的收敛速度,综合考虑收敛速度和稳定性,改进算法 AVSLMS-d 参数设置为 $\beta=0.5$ 、 $r=2$ 、 $\delta=1$ 、 $\alpha=20$ 。

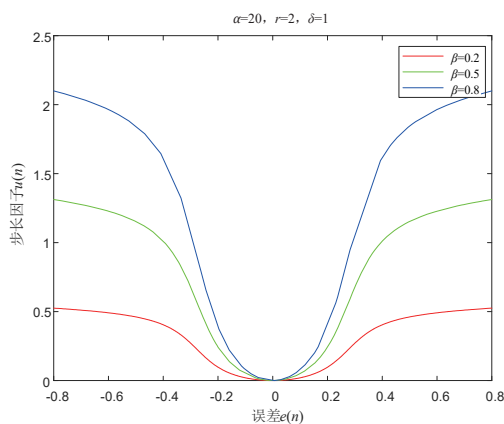


图 5 不同 β 数值步长与误差函数曲线

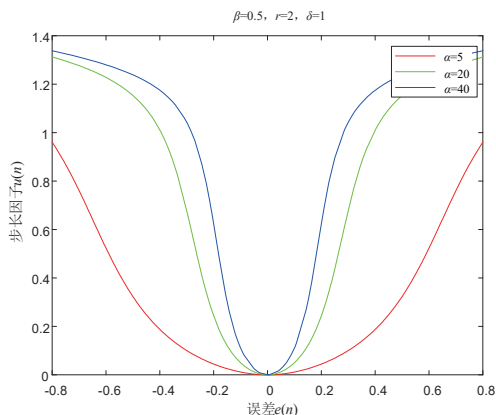


图 6 不同 α 数值步长与误差函数曲线

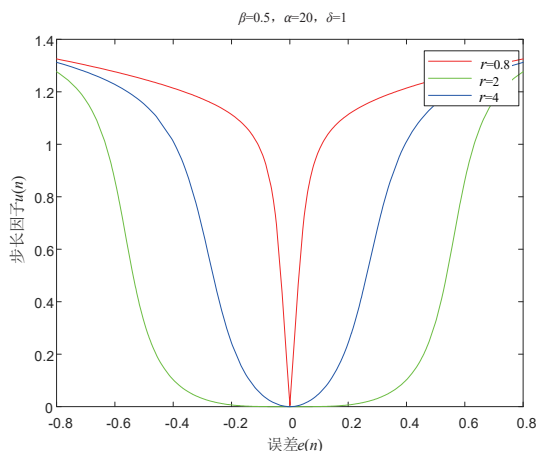


图 7 不同 r 数值步长与误差函数曲线

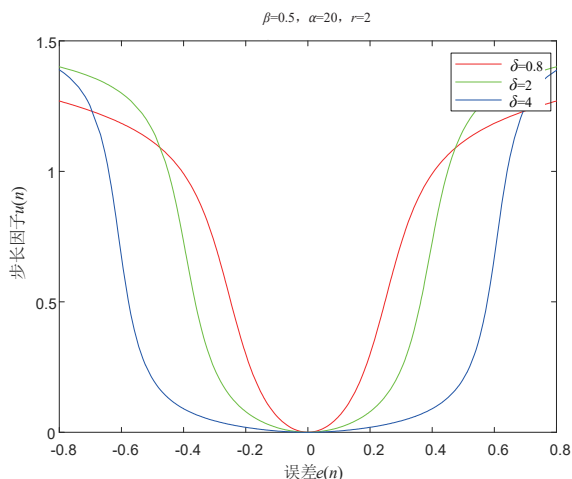


图 8 不同 δ 数值步长与误差函数曲线

将 AVSLMS-d 算法与上述基于反正切的变步长 LMS 算法进行对比,其步长与误差函数曲线如图 9 所示。

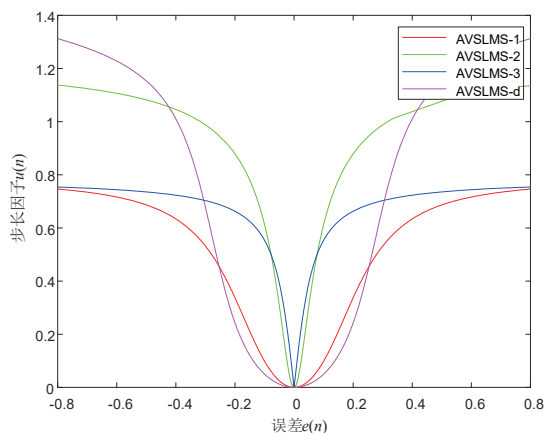


图 9 步长与误差函数曲线

由图 9 可知,本文提出的改进算法 AVSLMS-d 相比于 AVSLMS-1、AVSLMS-2、AVSLMS-3 的算法,有着更大的步长变化、更快的收敛速度,且在收敛后的性能也更加稳定。可以得出结论,AVSLMS-d 算法在步长变化、收敛速度和稳定性方面都表现出优势。

3 不同 LMS 算法性能对比测试

通过仿真对比基于 Sigmoid 函数、箕舌线、反正切的变步长 LMS 算法以及改进的变步长 LMS 算法在 MSE 上的性能。起始有限冲激响应滤波器的系数为 $[0.8, 0.5]$ ，迭代 500 次时，滤波器系数突变 $[0.4, 0.2]$ 。在信噪比为 30 dB 的环境下，上述各算法的均方误差对比如图 10 所示。

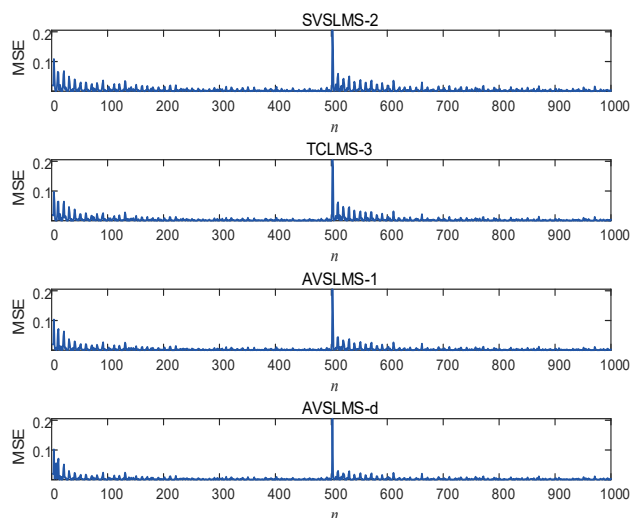


图 10 各算法的均方误差对比图

结果表明，AVSMLS-d 算法的 MSE 收敛速度明显快于其他算法。这意味着在相同的迭代次数下，AVSMLS-d 能够达到更低的误差水平，从而提高了滤波器的准确性和效率。且 AVSMLS-d 算法在收敛后趋于稳定，展现出良好的性能表现。

4 结语

本文通过对比 Sigmoid 函数、箕舌线函数、反正切函数的变步长 LMS 算法以及改进的反正切变步长 LMS 算法，验证了改进算法在收敛性能上的优势。在 MATLAB 仿真环境下，通过分析步长与误差函数曲线，证明了改进的反正切变步长 LMS 算法在收敛速度和收敛精度方面均优于其他反正切变步长 LMS 算法。此外，通过对比不同变步长 LMS 算法的均方误差 (MSE)，进一步验证了改进算法在滤波性能上的优越性。

总而言之，本文提出的改进变步长 LMS 算法能够快速且稳定地完成滤波任务，为实时信号处理、声源定位等领域提供了有力的支持。

参考文献:

- [1] 覃景繁, 韦岗. 基于 S 型函数的变步长 LMS 自适应滤波算法 [J]. 无线电工程, 1996(4):44-47.
- [2] 肖玮, 刘思蔚, 唐宇龙, 等. 基于对称非线性函数的变步长 LMS 自适应滤波算法 [J]. 火力与指挥控制, 2023,48(2):66-

72.

- [3] 郭辰铎, 舒东亮, 路寅, 等. 基于箕舌线可变速长 LMS 的空频抗干扰算法 [J]. 数据采集与处理, 2023, 38(6): 1319-1330.
- [4] 韩啸, 陈钟荣. 一种改进反正切函数的变步长 LMS 算法 [J]. 中国科技论文, 2019,14(7):759-764.
- [5] 覃景繁, 欧阳景正. 一种新的变步长 LMS 自适应滤波算法 [J]. 数据采集与处理, 1997(3):171-174.
- [6] 仝喜峰, 陈卫松, 钱隆彦, 等. 一种非线性变步长 LMS 自适应滤波算法 [J]. 无线电通信技术, 2019, 45(4): 391-396.
- [7] 吴瑶, 张海霞. 一种变步长 LMS 自适应滤波的改进算法 [J]. 通信技术, 2021, 54(2): 307-311.
- [8] 邓江波, 侯新国, 吴正国. 基于箕舌线的变步长 LMS 自适应算法 [J]. 数据采集与处理, 2004(3): 282-285.
- [9] 周学文, 柯熙政. 一种新的变步长 LMS 自适应滤波算法 [J]. 西安理工大学学报, 2006(3): 290-293.
- [10] 张淦, 王海彬, 黄媛婷, 等. 引信微弱信号降噪箕舌线最小均方误差变步长算法 [J]. 探测与控制学报, 2023,45(2):1-10.
- [11] 赵雪松. LMS 自适应滤波算法性能研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2022.
- [12] 朱斌, 马艳. 一种新的变步长 LMS 算法分析 [J]. 计算机仿真, 2008(9):93-95.
- [13] 刘建勋, 王锋, 赵河明, 等. 基于 LMS 原理的引信回波信号滤波算法及应用 [J]. 弹箭与制导学报, 2017,37(6):45-47.
- [14] 张进玉, 王翀, 杨宏, 等. 基于反正切函数的可见光通信 LMS 均衡算法 [J]. 光通信技术, 2018, 42(5): 59-62.

【作者简介】

李典航 (1998—), 男, 吉林长春人, 硕士, 研究方向: 人工智能。

王申营 (1998—), 男, 山东济南人, 硕士, 研究方向: 人工智能。

程 骏 (2002—), 男, 安徽宣城人, 硕士, 研究方向: 人工智能。

彭云锋 (1998—), 男, 广东深圳人, 硕士, 研究方向: 人工智能。

邹腾跃 (1984—), 男, 福建福州人, 博士, 副教授、硕士生导师, 研究方向: 人工智能。

(收稿日期: 2025-02-09)